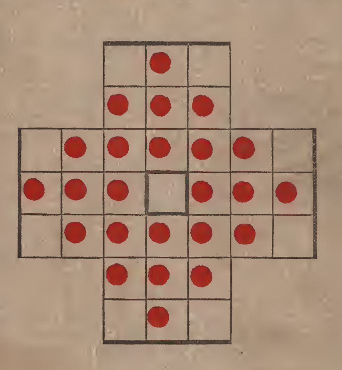
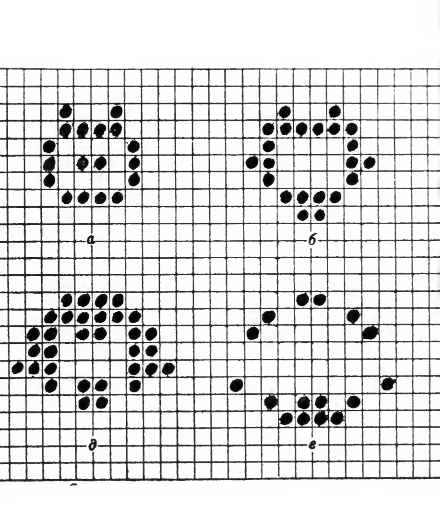
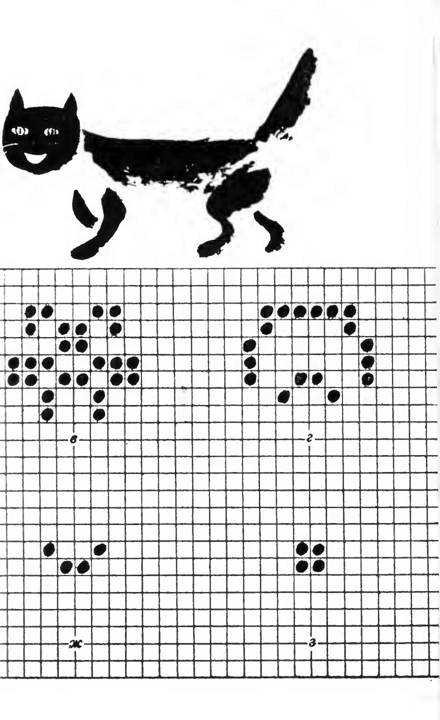
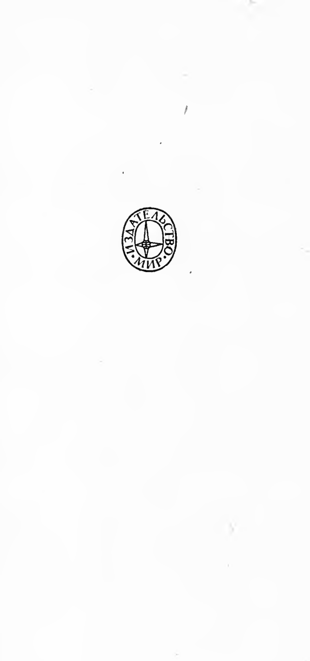
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОСУГИ

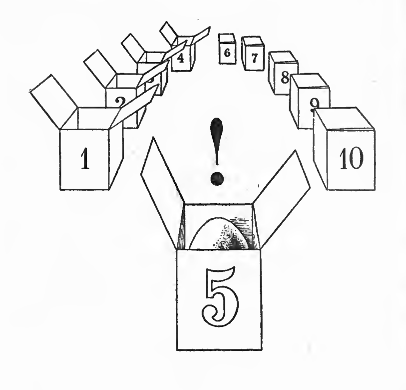
Мартин Гарднер




а
б
д
е


в
г
ж
з


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР



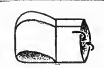
MARTIN GARDNER

NEW MATHEMATICAL DIVERSIONS
FROM SCIENTIFIC AMERICAN

New York, Simon and Schuster, 1966

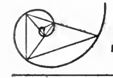
THE UNEXPECTED HANGING AND
OTHER MATHEMATICAL DIVERSIONS

New York, Simon and Schuster, 1969

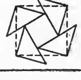


Мартин Гарднер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ



ДОСУГИ



Перевод с английского Ю. А. Данилова
Под редакцией Я. А. Смородинского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА

1972

51
Г20

Гарднер М.

Г20 Математические досуги. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Под ред. Я. А. Смородинского. М., «Мир», 1972.
496 стр. с илл.

Как и предыдущая книга известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения», книга «Математические досуги» в живой и увлекательной форме рассказывает читателю много удивительного из самых разных разделов математики. Любители головоломок смогут испробовать свои силы в решении парадоксов и задач, а те, кто увлекается показом фокусов, — пополнить свой репертуар.

Книга доступна самому широкому кругу читателей и доставит много радости всем любителям математических развлечений.

2-2-3
164-72 51

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Следуя за развитием естественных наук, математические игры пережили переход от классической эры к современной. Не только наука, но и развлечения XX века неотделимы от современной математики. Если в классические времена лишь теория вероятностей органически включала в себя теорию игр, то сейчас само слово «игра» стало математическим термином, который широко используется в самых различных науках: в экономике, биологии, военном деле... Однако популярная литература почти не отразила этого превращения.

К числу тех, кто прокладывает новые пути в этой трудной области, несомненно принадлежит Мартин Гарднер. Его книги с полным правом могли бы называться «Математическими развлечениями XX века». Они открывают читателю совершенно новый мир. Используя самые разнообразные источники, включая в переписку и поиски десятки математиков и физиков, автор по существу создает новый жанр популярной литературы. Его книги обращены к самому широкому кругу читателей и в то же время затрагивают весьма трудные разделы современной науки. Читатель не может не получить удовольствия от неожиданных связей между развлечениями и серьезной наукой и не удивиться остроумным применениям абстрактных понятий и вычислительной техники для анализа игр и головоломок.

Первая книга Гарднера «Математические головоломки и развлечения» вышла в русском переводе год назад и была по достоинству оценена читателями. Тридцать восемь математических миниатюр, вошедших во второй том, не менее интересны, чем первые сорок шесть. Эти восемьдесят четыре главы практически

исчерпывают содержание пяти сборников Гарднера, выпущенных на английском языке и первоначально опубликованных в журнале Scientific American в 1956—1964 годах. Хронологический порядок нарушает лишь последняя глава, которая носит название „Игра «Жизнь»". Опубликованная в 1971 году, она должна была бы войти в следующую книгу. Однако игра «Жизнь» настолько необычна и непохожа на все остальные, что нам хотелось привести ее как пример истинной игры XX века, в которую лучше всего играть с вычислительной машиной. В этой игре причудливая смена позиций и трудно предсказуемый ход событий воспринимаются как почти готовый сценарий увлекательного кинофильма.

В конце нашей книги помещен список литературы по занимательной математике на русском языке, который дополняет список, опубликованный в первом томе. Это по существу первый опыт такой библиографии.

Ю. Данилов
Я. Смородинский

ГЛАВА 1

ОШИБКА ЭЙЛЕРА: ОТКРЫТИЕ ГРЕКО-ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА

История математики богата остроумными гипотезами (подсказаниыми интуицией ученых, обладавших даром математического предвидеиия), которые в течение столетий ие удается ни доказать, ни опровергнуть. Когда же, наконец, появляется доказательство (или опровержение), математики считают это событием первостепеииой важности.

На ежегодном съезде Американского математического общества в апреле 1959 года были сделаны сообщеиия сразу о двух таких работах. Одна из иих не представляет для иас иитереса (она относится к сложным разделам теории групп); зато вторая, посвященная опровержению гипотезы великого математика Эйлера, связаиа с миогими задачами занимательной математики. В свое время Эйлер высказал предположеиие, что греко-латинских квадратов определеииых порядков не существует, и эта гипотеза в течение 177 лет считалась иеопровержимой. Одиако трем математикам (Э. Т. Паркеру, Р. К. Боусу и С. С. Шрикхенду) удалось составить греко-латинские квадраты десятого порядка и тем самым опровергнуть гипотезу Эйлера.

Трио математиков, которых друзья окрестили «разоблачителями Эйлера», иаписало коротеиькую работу о своем открытии. Я приведу ее с иекоторыми комментариями.

> «В последиие годы жизни Леонард Эйлер (1707—1783) иаписал обширный мемуар о магических квадратах, озаглавлеииый «Исследоваиие магического квадрата иового типа». Сейчас такие квадраты приият о иазывать латинскими, потому

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

aα	bβ	cγ	dδ
bγ	aδ	dα	cβ
cδ	dγ	aβ	bα
dβ	cα	bδ	aγ

Рис. 1. Греко-латинский квадрат (справа), образованный наложением (суперпозицией) двух латинских квадратов, показанных слева.

> что Эйлер обозначил их клетки обычными латинскими буквами (вместо букв греческого алфавита)».

В качестве примера рассмотрим квадрат, изображенный на рис. 1 слева. Шестнадцать клеток в нем заполнены латинскими буквами *a*, *b*, *c* и *d*, причем в каждом столбце и в каждой строке буквы не повторяются. В центре рис. 1 находится другой латинский квадрат, в клетки которого вписаны греческие буквы α, β, γ, δ. Если наложить квадраты друг на друга, как показано на правом рисунке, то окажется, что каждая латинская буква появляется один и только один раз в паре с каждой греческой буквой. Два или более латинских квадратов, которые можно так скомбинировать друг с другом, называются ортогональными, а получившийся комбинированный квадрат принято называть греко-латинским.

Способ размещения букв в правом квадрате является решением популярной в позапрошлом веке карточной головоломки: из тузов, королей, дам и валетов всех четырех мастей (всего 16 карт) надо сложить квадрат так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились карты четырех разных мастей и четырех разных значений. Попробуйте решить другую задачу, в которой то же условие должно выполняться не только для строк и столбцов, но и для двух главных диагоналей.

> «В общем случае латинский квадрат n-го порядка определяется как квадрат размером $n \times n$, у которого все n^2 клеток заполнены n различными

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Рис. 2. Четыре взаимно ортогональных латинских квадрата пятого порядка.

символами, причем так, что каждый символ встречается один и только один раз в каждом столбце и в каждой строке. Может существовать набор из двух или большего числа латинских квадратов, попарно ортогональных друг другу. На рис. 2 показаны четыре взаимно ортогональных латинских квадрата пятого порядка с числами в качестве символов».

Во времена Эйлера умели доказывать, что не существует греко-латинского квадрата второго порядка. Были известны квадраты третьего, четвертого и пятого порядков, и, естественно, вставал вопрос: как обстоит дело при $n = 6$? Эйлер сформулировал задачу следующим образом. В каждом из шести полков служат шесть офицеров шести различных званий. Можно ли построить

этих 36 офицеров в каре так, чтобы шесть офицеров, стоящие в каждой колонне и в каждой шеренге, были шести разных званий и служили в шести разных полках?

> «Эйлер показал, что задача о n^2 офицеров (эквивалентная задаче о построении греко-латинского квадрата n-го порядка) всегда разрешима, если n — нечетное или «четно-четное» (то есть делящееся на четыре) число. Тщательно проанализировав задачу, Эйлер пришел к следующему выводу: «Я не сомневаюсь в том, что полный квадрат из 36 клеток построить невозможно; то же самое относится к случаю, если $n = 10$, $n = 14$ и вообще если n равно любому нечетно-четному числу» (то есть четному числу, которое не делится на 4). Этот вывод известен как гипотеза Эйлера. Более строгая формулировка гипотезы звучит так: ни для какого положительного целого числа k не существует пары ортогональных латинских квадратов порядка $n = 4k + 2$.

В 1901 году французский математик Гастон Тарри опубликовал доказательство гипотезы Эйлера для квадрата шестого порядка. Тарри доказывал задачу вместе со своим братом, и сделали они это очень трудоемким способом, просто выписав все возможные латинские квадраты шестого порядка и показав, что ни одна пара не может образовать греко-латинский квадрат. Это, безусловно, подтверждало гипотезу Эйлера. Некоторые математики даже выступили в печати с «доказательствами» того, что гипотеза Эйлера верна, но впоследствии во всех этих доказательствах обнаружились ошибки. Трудоемкость метода Тарри возрастает с увеличением порядка квадрата. Следующий неизученный случай ($n = 10$) оказался уже слишком сложным для такого исследования и еще в 1959 году находился за пределами возможностей электронно-вычислительных машин. Математики Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе составили программу поиска греко-латинских квадратов десятого порядка на машине SWAC. Проработав более 100 часов, машина не нашла ни одного квадрата. Надо сказать, что поиски ограничивались мизерной долей всех возможных случаев. От-

сюда можно было сделать только одно заключение: если гипотеза Эйлера справедлива, то для доказательства этого даже самой быстродействующей электронно-вычислительной машине 1959 года понадобилось бы по крайне мере столетие (если бы она работала по программе, написанной для SWAC).

> «Мемуар Эйлера заканчивается следующей фразой: „На этом я прекращаю исследование задачи, которая, будучи сама по себе не слишком полезна, привела нас к весьма важным вопросам комбинаторики и общей теории магических квадратов".
>
> Удивительным примером единства наук является то, что толчком для изучения гипотезы Эйлера послужили практические нужды сельского хозяйства, а исследования, которые сам Эйлер считал бесполезными, оказались чрезвычайно важными для планирования экспериментов».

Рональд Фишер, ныне известный ученый, профессор генетики Кембриджского университета, в начале 20-х годов нашего века впервые показал, как использовать латинские квадраты в сельском хозяйстве. Пусть, например, вам надо выяснить с минимальной затратой времени и средств, как влияют на рост пшеницы семь различных удобрений. Трудность подобных экспериментов связана с тем, что плодородие различных участков почвы неодинаково и обычно меняется без какой-либо закономерности. Как поставить эксперимент, в котором будут не только исследованы все семь удобрений, но и исключена всякая неоднозначность, порожденная изменением состава почвы? Для этого пшеничное поле следует разделить на клетки, чтобы получился квадрат 7×7, и внести удобрения по схеме любого квадрата, выбранного случайным образом. Несложная статистическая обработка результатов позволяет исключить всякие отклонения, связанные с изменением плодородия почвы.

Предположим, что у нас не один, а семь сортов пшеницы. Можно ли так поставить эксперимент, чтобы учесть и четвертую переменную — сорт пшеницы? (Под тремя первыми переменными подразумеваются две координаты грядки — номер строки и номер столбца — и

вид удобрения.) Решением этой задачи будет греко-латинский квадрат. Семь сортов пшеницы надо посеять в соответствии с греческими буквами, а семь разных удобрений распределить в соответствии с латинскими. Результаты опыта и в этом случае требуют лишь простой статистической обработки.

Греко-латинские квадраты сейчас широко используются при планировании экспериментов в биологии, медицине, социологии и даже в торговле. Естественно, что ячейка квадрата совсем не обязательно должна быть участком земли. Ей может соответствовать корова, пациент, пришедший к врачу, лист дерева, клетка с животными, место, в которое делается укол, промежуток времени и даже наблюдатель или группа наблюдателей. Греко-латинский квадрат в каждом случае является схемой эксперимента. Его строки отвечают одной, столбцы — другой, латинские буквы — третьей, а греческие буквы — четвертой переменной. Предположим, например, что ученый-медик хочет выяснить действие пяти лекарственных препаратов на людей пяти разных возрастных групп, пяти весовых категорий, находящихся в пяти разных стадиях одной и той же болезни. Для этого эксперимента лучше всего воспользоваться греко-латинским квадратом пятого порядка, выбранным случайным образом из всех возможных квадратов того же порядка. Если число переменных должно быть больше, комбинируют несколько латинских квадратов; правда, для квадратов n-го порядка существует не больше чем $n-1$ взаимно ортогональных квадратов.

Рассказ о том, как Паркер, Боус и Шрикхенд ухитрились найти греко-латинские квадраты порядков 10, 14, 18, 22 (и так далее), мы начнем с 1958 года, когда Паркер сделал открытие, подвергшее гипотезу Эйлера серьезному сомнению. Вслед за Паркером Боус нашел некоторые общие правила построения греко-латинских квадратов. Затем с помощью этих правил Боус и Шрикхенд сумели построить квадрат порядка 22, что противоречило гипотезе Эйлера, ибо 22 — четное число, которое не делится на 4. Интересно, что метод построения этого квадрата был основан на знаменитой задаче занимательной математики, предложенной Киркманом в 1850 году и известной как «задача Киркмана о школьницах».

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Рис. 3. Греко-латинский квадрат десятого порядка, построенный Э. Т. Паркером.

Учительница, взяв на ежедневную прогулку 15 девочек, обычно строит их в 5 шеренг по 3 девочки в каждой. Надо так расставить девочек, чтобы в течение недели ни одна девочка не оказалась бы в одном ряду с другой девочкой дважды. Решение задачи представляет собой пример важного метода планирования эксперимента, который называется «уравновешенные неполные блоки».

Когда Паркеру стали известны результаты Боуса и Шрикхенда, он придумал новый метод построения греко-латинского квадрата десятого порядка, изображенного на рис. 3. В каждой клетке левая цифра (от 0 до 9) относится к первому латинскому квадрату, а правая цифра — ко второму. С помощью этого квадрата, само существование которого отрицается во многих учебниках по методике эксперимента, можно без труда осуществить эксперименты, где эффективно контролируются четыре переменные, каждая из которых принимает де-

сять разных значений. (Отметим, что находящийся в правом нижнем углу квадрата десятого порядка маленький квадрат третьего порядка представляет собой греко-латинский квадрат. Все квадраты десятого порядка, составленные Паркером с сотрудниками, содержали подквадрат третьего порядка — подразумевается, что, переставляя строки и столбцы большого квадрата, такой маленький квадрат можно выделить всегда. Изменение порядка расположения строк и столбцов не влияет на свойства греко-латинского квадрата. Это утверждение совершенно тривиально. Если один квадрат получается из другого перестановкой строк или столбцов, то эти два квадрата не различаются. Одно время оставался открытым вопрос о том, все ли греко-латинские квадраты десятого порядка содержат подквадраты третьего порядка; ответ оказался отрицательным, потому что нашлось много квадратов, не обладавших таким свойством.)

Заканчивая сообщение, авторы пишут:

> «В это время завязалась лихорадочная переписка между Боусом и Шрикхендом, с одной стороны, и Паркером — с другой. Методы все больше совершенствовались; в конце концов выяснилось, что гипотеза Эйлера неверна для всех значений $n = 4k + 2$, когда n больше шести. Та неожиданность, с которой вдруг разрешилась проблема, в течение двух столетий сбивавшая с толку математиков, поразила авторов открытия не меньше, чем окружающих. Еще удивительнее то, что для доказательства теоремы использовались методы, весьма далекие от используемых в современной математике.

После 1959 года резко возросли как скорость электронно-вычислительных машин, так и изобретательность математиков-программистов. Паркер написал программу для электронно-вычислительной машины UNIVAC-1206, которой требовалось от 28 до 45 мин рабочего времени, чтобы осуществить полный поиск квадратов, ортогональных заданному латинскому квадрату десятого порядка, то есть машина работала примерно в три триллиона раз быстрее старой SWAC. Результатом были сотни новых греко-латинских квадратов десятого по-

рядка. Оказалось, что такие квадраты встречаются весьма часто. Были найдены квадраты, ортогоиальные более чем половине введеных в машину латиских квадратов десятого порядка, выбранных случайиым образом. Паркер по этому поводу писал: «Таким образом, Эйлер довольно сильно ошибся, ибо расчеты на старых машииах показали, что поиски надо вести в более широких масштабах». Проведениые в последнее время исследования греко-латинских квадратов с помощью машин принесли сильнейшее разочарование, потому что никому так и не удалось найти трех взаимио ортогональных латинских квадратов десятого порядка. Раньше было доказаио, что максимальное число взаимно ортогональных латинских квадратов n-го порядка равно $n-1$. Если найдено $n-1$ таких квадратов, то оии называются «полиым набором». Например, латинский квадрат второго порядка имеет полиый набор, состоящий из него самого. Квадрат третьего порядка имеет полный набор из двух ортогоиальиых квадратов, а полный набор квадрата четвертого порядка содержит три квадрата. Полиый набор из четырех взаимно ортогональиых латинских квадратов пятого порядка показан на рис. 2. (Конечно, из любой пары можно построить греко-латинский квадрат.) Квадрат шестого порядка не имеет ие только полного иабора, но даже взаимно ортогоиальной пары, зато полные иаборы седьмого, восьмого и девятого порядков существуют. Поэтому десятый порядок является иаименьшим, для которого пока ие выясиеио, можно ли иайти полный набор. Неизвестно даже, существует ли набор из трех квадратов десятого порядка.

Интерес к рассматриваемому вопросу возрастает из-за его тесной связи с так называемыми «коиечиыми проективиыми плоскостями». Было показаио, что если существует полный набор взаимно ортогональиых латииских квадратов порядка n, то с их помощью можно построить конечную проективную плоскость порядка n. Наоборот, если дана конечная проективная плоскость порядка n, то можпо построить лолный набор взаимио ортогональиых латииских квадратов порядка n. Тарри доказал, что нельзя построить даже двух латинских квадратов шестого порядка, следовательно, не существует и коиечиой проективной плоскости шестого

порядка. Известны полные наборы (а значит, конечные проективные плоскости) для порядков, равных 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Низший порядок конечной проективной плоскости, существование которой не было ни доказано, ни опровергнуто, равен десяти. Таким образом, обнаружение полного набора девяти латинских квадратов десятого порядка будет одновременно ответом на очень важный и пока не решенный вопрос о конечных проективных плоскостях. В настоящее время решение этой задачи находится за пределами возможностей электронно-вычислительных машин, и не похоже, чтобы его можно было осуществить до тех пор, пока значительно не возрастут их скорости или же не будет найден какой-то принципиально новый подход.

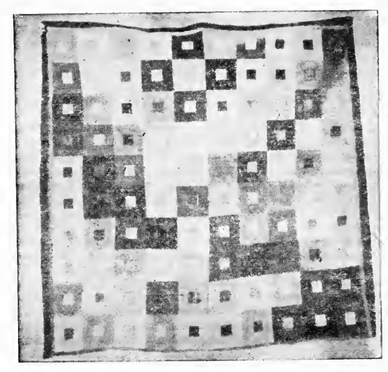


Рис. 4. Коврик, узор которого повторяет схему паркеровского греко-латинского квадрата.

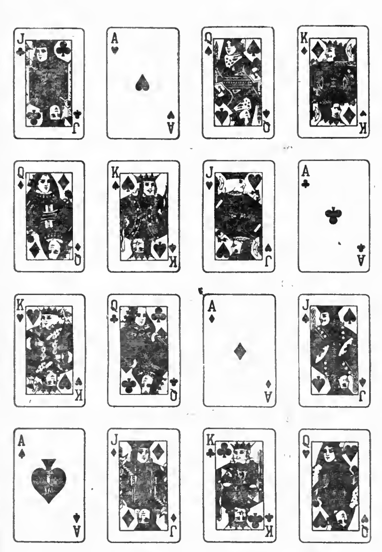


Рис. 5. Решение задачи с картами.

На обложке ноябрьского номера журнала *Scientific American* за 1959 год была помещена репродукция с картины работающей в журнале художницы Эми Казэ. На картине изображен греко-латинский квадрат

десятого порядка, показанный на рис. 3. Художница взяла десять красок вместо десяти цифр и каждую клетку раскрасила в два цвета так, чтобы на картине не было двух одинаковых клеток. Расцветку этого квадрата повторяет изображенный на рис. 4 прелестный коврик, вышитый одной из читательниц. Если узор на коврике повернуть на 90°, то он совпадет с квадратом на рис. 3. В каждой клетке цвет каймы относится к одному латинскому квадрату, а цвет маленького квадратика — к другому. В любом столбце и в любой строке квадрата каждый цвет появляется один раз в центре клетки и один раз — по краям. Картина Эми Казэ была куплена у художницы и подарена Паркеру его институтом.

ОТВЕТ

На рис. 5 показано, как надо разложить шестнадцать старших карт, чтобы ни в одном ряду, ни в одном столбце и ни на одной главной диагонали ни картинки, ни масти не повторялись. Заметим, что четыре карты в каждом углу, а также четыре центральные карты образуют набор, в котором тоже представлены все масти и картинки. Неплохо, если бы еще и цвета мастей располагались в шахматном порядке, но последнее уже невозможно.

Роуз Болл в книге «Математические очерки и развлечения» приводит ссылку на издание 1723 года, где впервые упоминается задача, и сообщает, что она имеет 72 существенно различных решения (решения, переходящие друг в друга при вращениях и отражениях, считаются одинаковыми). Однако Дьюдени в «Математических забавах» (задача 304), опираясь на более ранний источник 1624 года — книгу Клода Гаспара Баше, — замечает, что число 72 указано неверно и что всего существует 144 различных решения.

Если рассматривать только строки и столбцы, забыв о расположении карт на главных диагоналях, то можно найти решения, в которых цвета чередуются в шахматном порядке. Вот одно из решений.

Дама червей	Король треф	Валет бубен	Туз пик
Валет треф	Туз червей	Дама пик	Король бубен
Туз бубен	Валет пик	Король червей	Дама треф
Король пик	Дама бубен	Туз треф	Валет червей

ГЛАВА 2

ЭЛЛИПС

«Нельзя отрицать, что буквально с первого взгляда круг привлекает нас своей простотой, однако даже самому консервативному астроному достаточно лишь мимолетного знакомства с эллипсом, чтобы убедиться в том, что идеальная простота круга сродни бессмысленной улыбке идиота. По сравнению со сведениями, которые несет эллипс, круг не дает ничего. Возможно, рассчитывая на физическую простоту Вселенной, мы тоже мыслим окружностями, проецируя свое элементарное мышление на бесконечно запутанный окружающий мир», — писал в своей книге «Математика — царица и служанка науки» Эрик Т. Белл.

Математики имеют обыкновение изучать вещи, кажущиеся совершенно бессмысленными, но проходят века, и эти исследования приобретают огромную научную ценность. Вряд ли можно найти лучший пример этому, чем исследование древними греками кривых второго порядка, отличных от окружностей: эллипса, параболы и гиперболы. Первым их начал изучать один из учеников Платона. До XVII века, когда Кеплер открыл, что планеты движутся по эллипсам, а Галилей доказал, что траекторией снаряда является парабола, эти кривые, если можно так выразиться, не находили себе применения.

Аполлоний из Перги, древнегреческий геометр, живший в III веке до нашей эры, посвятил этим кривым огромнейший трактат. В своей книге «Конические сечения» он впервые показал, как можно получить все четыре кривые, включая и окружность, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Если плоскость пересекает конус параллельно основанию, то в сечении получается окружность (рис. 6, *а*). Если

плоскость немного наклонена (неважно насколько), то сечение оказывается эллиптическим (рис. 6, *б*). Чем сильнее наклоняется плоскость, тем больше вытягивается эллипс, или, как говорят математики, тем больше возрастает его эксцентриситет. Может показаться, что с увеличением угла наклона секущей плоскости форма кривой должна приближаться к грушевидной (потому что чем глубже разрез, тем шире конус), но это не так. Пока плоскость не станет параллельной образующей конуса, кривая остается точным эллипсом. Но, как только плоскость оказывается параллельной образующей, кривая перестает быть замкнутой и две ее ветви устремляются в бесконечность, образуя параболу (рис. 6, *в*). Дальнейший наклон плоскости приведет к тому, что она пересечет второй конус, имеющий с первым общую вершину (рис. 6, *г*). В этом случае два конических сечения представляют собой две ветви гиперболы. (Очень распространена ошибка, будто для образования гиперболы плоскость непременно должна быть параллельна оси конуса.) Форма ветвей меняется с изменением наклона плоскости до тех пор, пока они не выродятся в прямые. Все четыре типа кривых (окружность, эллипс, парабола и гипербола) называются кривыми второго порядка, потому что в декартовых координатах они описываются уравнениями второго порядка с двумя

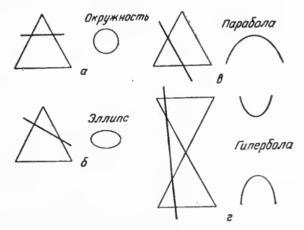


Рис. 6. Четыре конических сечения.

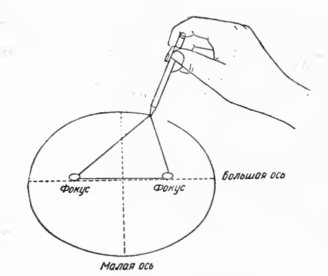


Рис. 7. Простейший способ вычерчивания эллипса.

переменными. После прямой и окружности эллипс является простейшей из всех плоских кривых. Существует много разных определений эллипса, но следующее определение, пожалуй, самое понятное: эллипс есть траектория точки, движущейся в плоскости так, что сумма ее расстояний до двух фиксированных точек остается постоянной. Это определение лежит в основе хорошо известного способа построения эллипса.

Воткните в лист бумаги две кнопки, наденьте на них петлю из нитки и натяните ее острием карандаша так, как показано на рис. 7. Водя карандашом вокруг кнопок, вы нарисуете эллипс. (Длина нитки не может измениться, поэтому сумма расстояний от острия карандаша до кнопок остается постоянной.) Две фиксированные точки (в нашем случае — кнопки) называются фокусами эллипса. Они лежат на большой оси. Диаметр, перпендикулярный этой оси, называется малой осью. Сближение кнопок без изменения длины нитки уменьшает эксцентриситет эллипса. Если фокусы совпадают, эллипс превращается в окружность. С увеличением расстояния между фокусами эллипс вытягивается до тех пор, пока, наконец, не вырождится в прямую.

Эллипс можно начертить и многими другими способами. Для демонстрации одного забавного способа понадобится сковородка и картонный круг диаметром, вдвое меньшим диаметра сковороды. Оклейте внутренний борт сковороды материей, чтобы круг при вращении не соскальзывал с него. Полосками клейкой ленты укрепите на дне сковороды лист бумаги. Продырявьте круг в любом месте отточенным концом карандаша до соприкосновения с бумагой и начните катить диск по краю сковороды (рис. 8). На бумаге появится эллипс. Удобно, одной рукой придерживая карандаш, второй медленно катить диск, плотно прижав его к краю сковороды. Если вы проткнете диск в центре, то карандаш нарисует окружность. Чем ближе отверстие к краю диска, тем больше эксцентриситет эллипса. Если карандаш стоит на краю диска, эллиптический след вырождается в прямую.

А вот другой, не менее приятный способ вычерчивания эллипса. Вырежьте из бумаги большой круг и в любом его месте, кроме центра, поставьте точку. Сложите круг так, чтобы эта точка оказалась под любой точкой окружности на краю диска. Разогните листок и снова согните, прикрыв точку уже другим местом на окружности. Сделайте так несколько раз, пока вся бумага не покроется сгибами, которые образуют семейство касательных к эллипсу (рис. 9).

Г. Дьюдени объясняет, как нарисовать эллипс с помощью нитки и двух булавок и как вычертить тем же способом эллипс с заданными осями.

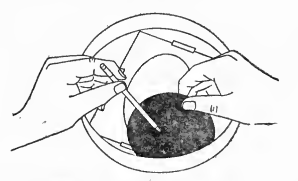


Рис. 8. Эллипсограф из сковороды и картонного круга.

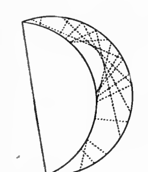
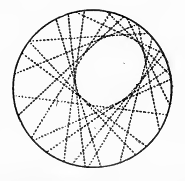



Рис. 9. Если лист бумаги перегибать так, чтобы край его все время проходил через точку, не совпадающую с центром листа, то огибающая лииия сгиба будет эллипсом.

Сиачала следует начертить оси. Затем находят фокусы A и B эллипса, имеющего такие оси. Пусть C будет коицом малой оси. Точки A и B располòжеиы симметрично на большой оси, причем так, что отрезки AC и CB равиы каждой половиие главной оси. Теперь легко доказать, что с помощью петли, периметр которой равеи периметру треугольиика ABC, можио построить искомый эллипс.

Хотя эллипс и не столь прост, как окружиость, тем не менее ои чаще встречается в повседиевиой жизни. Дело в том, что любая окружиость стаиовится эллипсом, если смотреть иа иее под углом. Кроме того, все теии, отбрасываемые кругами и шарами, представляют собой эллипсы. На самой сфере теии ограничеиы окружностями большого круга (иапример, виутреииие очертания растущего месяца), но иам оии представляются частями эллипсов. Наклоиите стакан с водой (стакаи может быть и цилиидрической и коиической формы), и вы увидите, что поверхиость воды приияла очертания эллипса.

Лежащий на столе мяч (рис. 10) отбрасывает эллиптическую теиь, образоваииую сечением светового конуса, в который вписаи шар. Мяч касается стола точно в одиом из фокусов эллипса. Представим себе сферу с бо́льшим радиусом, которая вписана в тот же коиус, но касается стола снизу; тогда точка касания будет

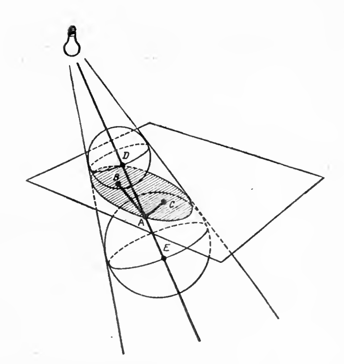


Рис. 10. С помощью большей сферы нетрудно показать, что тень от меньшей сферы имеет форму эллипса.

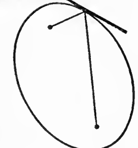
вторым фокусом эллипса. Обе сферы служат основой знаменитого доказательства (принадлежащего Ж. Данделену, бельгийскому математику XIX века) того, что в сечении конуса плоскостью действительно получается эллипс.

Пусть A — произвольная точка на поверхности конуса. Через точку A и вершину конуса проведем прямую (жирная прямая на рис. 10), касающуюся сфер в точках D и E.

Соединим прямыми точку A с точками B и C (в которых сферы соприкасаются с плоскостью). Отрезки AB и AD равны как касательные к сфере, проведенные из одной точки; отрезки AE и AC также равны по той же причине. Сложив равные отрезки, получим

$$AD + AE = AB + AC.$$

Рис. 11. **Касательная составляет равные углы с прямыми, проведенными в точку касания из обоих фокусов эллипса.**



Но $AD + AE$ — это просто отрезок DE. Из соображений симметрии длина DE должна быть постоянна и не зависеть от положения точки A. Если сумма $AD + AE$ постоянна, то из приведенного равенства следует, что сумма $AB + AC$ тоже должна быть постоянной. AB и AC — расстояния от точки A до двух фиксированных точек, поэтому геометрическим местом точек A должен быть эллипс, фокусами которого являются точки B и C.

В физике эллипс появляется как траектория движения материальной точки по замкнутой орбите под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Например, планеты и спутники обращаются по эллиптическим орбитам с центром тяготения в одном из фокусов. Во времена Кеплера считали, что бог не может допустить, чтобы планеты обращались по кривым, менее совершенным, чем окружности. Сообщая о своем великом открытии — о том, что планеты движутся по эллиптическим орбитам, — Кеплеру пришлось всячески оправдываться и извиняться. Он считал эллипсы той грязью, с которой ему пришлось возиться, чтобы очистить астрономическую науку от еще большей грязи, накопившейся вокруг попыток сохранить круговые орбиты. Сам Кеплер так никогда и не понял, почему орбиты небесных тел имеют форму эллипсов. Объяснить этот факт сумел лишь Ньютон, опиравшийся на открытый им же закон всемирного тяготения. Даже великий Галилей, имея неопровержимые доказательства, подтверждающие открытие Кеплера, до последних дней не верил в существование орбит, отличных от окружностей.

Отражение от эллипса обладает одним важным свойством, которое становится понятным из рис. 11. Проведем касательную к какой-нибудь точке эллипса.

Прямые, соединяющие эту точку с фокусами, образуют равные углы с касательной. Представим себе вертикальную металлическую полоску, ограничивающую эллипс. Если волна или материальная точка выйдет из фокуса и будет двигаться по прямой, то, отразившись от края, она окажется точно во втором фокусе. Более того, двигаясь из фокуса к границе эллипса с постоянной скоростью, тело или волна окажется во втором фокусе через один и тот же промежуток времени, независимо от первоначального направления движения. Вообразим, что в неглубокий эллиптический бак налита вода. Если опустить палец в то место, где находится фокус эллипса, то через несколько секунд вокруг второго фокуса сойдутся круговые волны.

Льюис Кэррол написал небольшую книжку о круглом бильярдном столе. В одиннадцатом издании Бри-

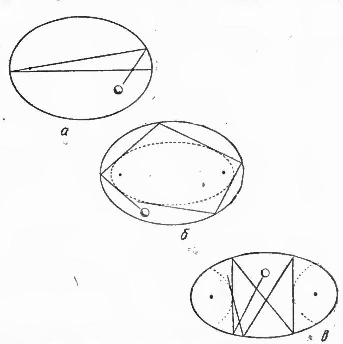


Рис. 12. Траектория шара на эллиптическом бильярдном столе.
а — шар проходит через фокус эллипса; б — шар не проходит между фокусами эллипса; в — шар проходит между фокусами эллипса.

танской энциклопедии в примечании к статье о бильярде мы читаем: «В 1907 году в Англии был для разнообразия введен овальный стол». Однако ни у этого стола, ни у круглого стола Льюиса Кэррола лузы не было, и только в июле 1964 года Эдвин Э. Робинсон получил патент на круглый бильярдный стол с четырьмя лузами. Тогда же в США появилась придуманная Артуром Фриго игра «Эллиптипул», в которой луза располагалась в одном из фокусов эллиптического стола. На таком столе, ударяя шары о борт, можно все время выигрывать.

Возможны три варианта поведения шара на круглом столе. Если послать шар без закручивания из фокуса в любом направлении, то он отразится от края и вернется во второй фокус. Пусть движение шара ничем не замедляется, тогда, отскочив от борта, он будет каждый раз проходить через фокус (рис. 12, *а*). Однако после нескольких отскоков траектория шара практически совпадет с главной осью эллипса. Если шар послан не из фокуса, то он никогда не попадет в промежуток между фокусами и будет все время двигаться по прямым, касательным к маленькому внутреннему эллипсу с теми же фокусами (рис. 12, *б*). Если шар запущен между фокусами, то он останется там навсегда и будет перемещаться от борта к борту, никогда не пересекая двух гипербол, фокусы которых совпадают с фокусами эллипса.

В поэме «Микадо» есть строчки, описывающие странный бильярд, на котором пришлось играть герою повествования:

Стол не выстлан сукном,
Кий изогнут крюком,
И шары все на эллипс похожи!

В книге Джеймса Джойса «Портрет художника как молодого человека» учитель, цитируя эти строки, объясняет, что В. С. Гильберт под эллипсом подразумевал эллипсоид. А что такое эллипсоид? Существуют эллипсоиды трех типов. Эллипсоид вращения, который правильнее назвать сфероидом, представляет собой поверхность, полученную вращением эллипса вокруг одной из осей. Вращение вокруг малой оси порождает сфероид, сплющенный у полюсов, как Земля. В результате

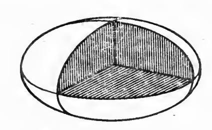


Рис. 13. Каждое сечение эллипсоида имеет форму эллипса.

вращения вокруг большой оси получается вытянутый сфероид, имеющий форму мяча для игры в регби. Представьте себе, что такой эллипсоид имеет зеркальную внутреннюю поверхность. Тогда, поместив в один из его фокусов горящую свечу, мы сможем зажечь бумажку, находящуюся во втором фокусе.

Знаменитые «комнаты шепотов» представляют собой помещения с эллипсоидальными потолками. Слабый звук, произнесенный в одном из фокусов, отчетливо слышен во втором. В США наиболее известна галерея шепотов в Скульптурном зале Капитолия, без ее посещения не обходится ни одна экскурсия. Прекрасная комната шепотов, правда меньшего размера, у входа в бар в нижнем этаже Центрального вокзала в Нью-Йорке. Двое людей, стоящих там лицом к стене в диагонально противоположных углах квадратной площадки, хорошо слышат друг друга, даже когда на площадке толпятся люди.

И вытянутый, и сплющенный сфероиды имеют в сечении окружность, если секущая плоскость перпендикулярна одной из трех координатных осей, и эллипс — если секущая плоскость перпендикулярна двум другим осям. Фигура является настоящим эллипсоидом, если длина всех трех ее осей различна, а сечения в трех перпендикулярных осям плоскостях имеют вид эллипсов (рис. 13). Волны, шлифуя в течение многих лет камни, в конце концов придают им почти эллипсоидальную форму.

Головоломок, связанных с эллипсом, немного. Вот две простые задачи.

1. Докажите, что ни один правильный многоугольник с числом сторон, большим, чем у квадрата, нельзя вписать в эллипс так, чтобы его вершины лежали на эллипсе.

2. Сгибая лист бумаги таким образом, как объяснялось выше, вы получаете эллипс с фокусами в центре и во внутренней точке круга. Докажите, что огибающая линии сгиба действительно будет эллипсом.

ОТВЕТЫ

1. В эллипс нельзя вписать никакой правильный многоугольник с числом сторон, большим, чем у квадрата. Дело в том, что вершины всех правильных многоугольников лежат на окружности. Окружность не может пересекаться с эллипсом более чем в четырех точках. Следовательно, не существует правильного многоугольника с числом сторон, большим, чем у квадрата, все вершины которого лежали бы на эллипсе.

2. Доказательство того, что при сгибании бумаги действительно получается эллипс, можно провести следующим образом.

Пусть точка A на рис. 14 — любая точка круга, не являющаяся его центром O. Мы сгибаем круг так, чтобы совместить точку A с какой-нибудь точкой окружности. При этом линией сгиба должна быть прямая XY, которая перпендикулярна AB и делит отрезок AB пополам. Отсюда следует, что BC и AC равны, а поэтому $OC + AC = OC + CB$. Но отрезок $OC + CB$ равен радиусу круга, который не может меняться, поэтому левая часть равенства $OC + AC$ тоже должна быть постоянной. Отрезок $OC + AC$ представляет собой сумму расстояний от точки C до двух фиксированных точек A и O, поэтому геометрическим местом точек C (движущихся при

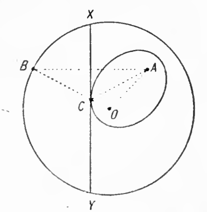


Рис. 14. Ответ к задаче со складыванием листа бумаги.

перемещении точки B по окружности) должен быть эллипс с фокусами в точках A и O.

Линия сгиба XY является касательной к эллипсу в точке C, потому что она образует равные углы с прямыми, проведенными из фокусов в точку C. Это легко установить, заметив, что угол XCA равен углу XCB, который в свою очередь равен углу YCO. Линии сгиба всегда касательны к эллипсу, поэтому эллипс является огибающей бесконечного множества линий сгиба, которые появляются, когда бумага сгибается много раз.

ГЛАВА 3

24 РАЗНОЦВЕТНЫХ КВАДРАТА И 30 РАЗНОЦВЕТНЫХ КУБИКОВ

Стандартный набор домино в США состоит из продолговатых черных плиток, разделенных на два квадрата. Каждый из квадратов либо оставлен пустым, либо помечен белыми точками (от одной до шести). Двух одинаковых плиточек нет, а все вместе они представляют собой 28 сочетаний по два из цифр от 0 до 6. Плиточки можно рассматривать как отрезки прямой, которые прикладывают концами друг к другу, чтобы составить из них цепь; в этом смысле все игры в домино являются строго одномерными.

Если, расширив задачу, рассмотреть дву- и трехмерные домино, то возникнут мало кому известные головоломки с богатым разнообразием красок. Британский специалист по комбинаторному анализу, преподаватель Королевской военной академии Александр Макмагон (умер в 1928 году) немало размышлял над такими гипердомино, и многие задачи этой главы заимствованы из одной его книги.

Двумерные домино лучше всего делать в форме правильных многоугольников: квадратов, равносторонних треугольников и шестиугольников, потому что любыми

перечисленными фигурами (каждым видом в отдельности) можно целиком, без пропусков, заполнить всю плоскость. Если выбрать квадраты и обозначить их стороны всеми возможными способами с помощью n символов, то получится набор из $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$ квадратов. Полный комплект из 24 квадратов, соответствующий $n=3$, изображен на рис. 15. Если читатель вырежет такой комплект из картона, то у него будет все необходимое для головоловок первой степени трудности.

Манипулировать цветными квадратами легче, чем квадратами с символами, поэтому лучше раскрасить квадраты в разные цвета. Наша задача — из 24 раскрашенных квадратов сложить прямоугольник размером 4×6, удовлетворяющий двум условиям:

1) каждая пара соприкасающихся сторон должна быть одного цвета;

2) весь край прямоугольника (то есть все его четыре стороны) должен быть одного цвета.

Считается, что у квадратов раскрашена только одна поверхность. В построенном прямоугольнике граница может быть любого цвета; при этом для каждого варианта раскраски существует много разных решений.

В свое время на страницах *Scientific American* я допустил грубую ошибку, сказав, что эта головоломка имеет только одно решение.

Заинтересовавшись этой задачей, один из читателей, Ф. Финк, нашел более тысячи решений (решения, получаемые одно из другого поворотами и отражениями, считаются одинаковыми). Всего по его оценке должно было быть 12 224 различных решений. Задачу довел до конца Г. Фельдман, который запрограммировал ее для электронно-вычислительной машины. Через 40 часов непрерывной работы машина выдала полный список, состоящий из 12 261 решения. Таким образом, Финк удивительно точно предсказал результат, пропустив всего 37 вариантов.

Потребовалось бы много страниц, чтобы хотя бы кратко изложить основные выводы, полученные Финком в результате анализа 12 261 решения. К сожалению, ни одна из найденных конфигураций не обладает двусторонней симметрией. Будем называть квадраты, составленные из двух прямоугольных треугольников одного

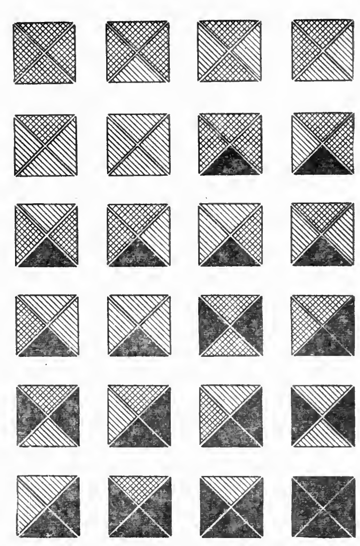


Рис. 15. Набор трехцветных квадратных домино.

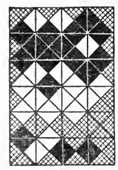
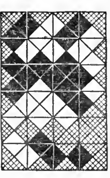
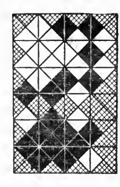
  

Рис. 16. Три из 12 261 решения задачи о разноцветных квадратах: рак (слева). 3 изолированных «алмаза» (в середине) и 13 изолированных «алмазов» (справа).

цвета, «алмазами». Тогда максимальное число «алмазов», составляющих в прямоугольнике одноцветный элемент полиомино, равно двенадцати. Примером служит прямоугольник, изображенный на рис. 16 слева. Входящий в него элемент полиомино двенадцатого порядка обладает двусторонней симметрией и похож на рака. Минимальное число изолированных «алмазов» (то есть «алмазов», окруженных со всех сторон квадратами других цветов) равно трем. В центральном прямоугольнике на рис. 16 все три изолированных «алмаза» разного цвета.

На рис. 16 справа изображено максимально возможное число изолированных «алмазов», равное тринадцати.

Обратите внимание, что на каждом рисунке между боковыми сторонами есть горизонтальный «мост», построенный из трех изолированных «алмазов» того же цвета, что и края прямоугольника.

Совершенно очевидно, что из 24 раскрашенных квадратов невозможно построить прямоугольник 2×12, потому что тогда в каждом квадрате один треугольник должен быть того же цвета, что и стороны прямоугольника. Попробуйте, глядя на рис. 15, доказать, что из этих 24 разноцветных квадратов прямоугольник размером 3×8 построить тоже невозможно.

Куб — простейший из правильных многогранников, которыми можно целиком заполнить трехмерное про-

страиство; потому элементы трехмерного домино мы будем представлять себе в форме кубиков. Раскрашивая их грани двумя красками, мы получим не больше десяти разных кубиков. Это число слишком мало, чтобы быть интересным. С другой стороны, имея в своем распоряжении три цвета, можно получить уже слишком много разных кубиков (57). Если же красок не три, а шесть, то шестицветных кубиков будет 2226; это большое число, но из него можно выбрать идеальный для наших целей комплект, состоящий из 30 кубиков, у которых все шесть граней разного цвета.

Легко понять, что 30 является максимальным числом. У каждого куба одна грань должна быть, скажем, красной. Противоположная ей грань может быть любого из пяти цветов. Оставшиеся четыре цвета можно распределить шестью разными способами, так что число различных кубов будет $5 \times 6 = 30$. (Два куба считаются различными, если их развертки нельзя совместить так, чтобы цвета всех граней совпали.)

На рис. 17 изображены развертки 30 кубиков. Этот набор из 30 кубиков, придуманный, по-видимому, также Макмагоном, стал классическим примером в занимательной геометрии. Мастерить комплект довольно утомительно, но вы будете вознаграждены с лихвой — аккуратно раскрашенные кубики станут любимой забавой вашей семьи. Они проживут десятки лет, не требуя ни ремонта, ни смены электрических батареек.

Кубики могут быть пластмассовыми или деревянными, лучше с гладкими гранями. Их можно купить или выпилить самому. Можно не раскрашивать кубики, а обклеить их разноцветными бумажными квадратами.

В качестве первого упражнения выберите любой из тридцати кубиков. Найдите теперь такой кубик, который можно положить рядом с выбранным так, чтобы соприкасающиеся грани были одного цвета, верхние квадраты — другого, а четыре остальные грани также были бы одинаково раскрашены. Такой куб всегда существует. Эти два кубика будут зеркальным отражением друг друга, поэтому можно сказать, что, как и у всех частиц материи, у каждого куба есть свой антикуб.

Отыскивая нужный кубик, можно значительно сэкономить время, если разложить кубики в ряды и переворачивать каждый ряд целиком, сжав его пальцами с тор-

цов. Пусть, иапример, вам нужно найти кубик, у которого противоположные грани красного и синего цвета. Разложите кубики в ряд красными гранями кверху; повериите ряд целиком на пол-оборота и выньте из него все кубики с синими гранями иаверху. Или, скажем, вам иужиы кубики, у которых одна вершина образоваиа граиями синего, желтого и зелеиого цветов. Разложите кубики в ряду синими гранями вверх, переверните весь ряд и выньте кубики, обращеиные кверху зеленой и желтой стороиами. Сложите из оставшихся ряд с зеленым верхом, перевериите его и отберите кубики с синими и желтыми гранями. Оставшиеся после этого кубики будут искомыми.

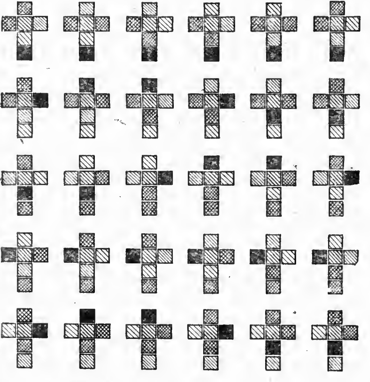


Рис. 17. Разверткн 30 разноцветных кубиков.

Из двух кубиков нельзя сложить параллелепипед, у которого каждая из четырех граней была бы одного цвета. Зато шесть кубиков можно так разложить в ряд, что на каждой стороне будут все шесть цветов. Существует красивый вариант последней задачи: сделайте так, чтобы у кубиков соприкасались грани одного цвета и чтобы торцы ряда тоже были одинаковыми.

Следующая головоломка будет посложнее. Отложите в сторону какой-нибудь кубик. Отберите восемь из оставшихся 29 кубиков и постройте из них куб размером $2 \times 2 \times 2$, который является точной копией отложенного кубика, но в два раза выше. В дополнение ко всему маленькие кубики должны соприкасаться гранями одного цвета. (Открытие того, что это всегда возможно и не зависит от способа раскраски отложенного кубика, Макмагон приписывает своему другу, полковнику Джулиану Джоселину.)

Для решения годятся только восемь определенных кубиков, вам вряд ли удастся их отыскать, если вы не знаете какого-нибудь систематического метода. Мне кажется наилучшим следующий способ.

Посмотрев, какого цвета три пары противоположных граней образца, отберите из 29 кубиков все те, у которых будет хотя бы одна такая пара сторон. У вас останется 16 кубиков. Переверните образец так, чтобы он был обращен к вам одной из верхних вершин и вам были бы видны только три грани, образующие эту вершину. Среди оставшихся 16 кубиков можно найти два таких, у которых три грани в одной из вершин расположены, как у образца. Эти два кубика отложите в сторону, а образец поверните к себе другой вершиной и найдите опять пару кубиков, имеющих такую же вершину.

В конце концов вы отберете восемь кубиков (по два для каждой верхней вершины образца), которые и будут искомыми. После этого сложить головоломку уже совсем просто.

Существуют, по-видимому, две модели, сложенные принципиально по-разному; остроумный способ, как превращать эти модели друг в друга, показан на рис. 18 (его придумал Л. Восбург Лионс). Оказалось, что эти способы очень интересно связаны между собой: 24 внешние грани одного куба являются 24 внутренними гра-

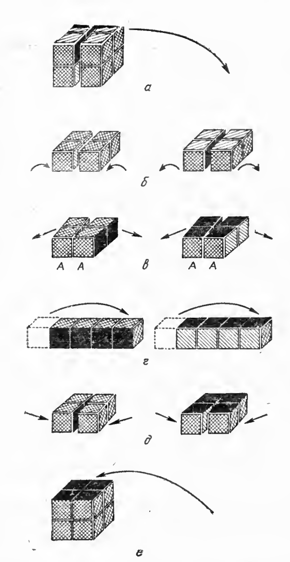


Рис. 18. Перестройка куба по Лионсу.

а — исходный вариант, в котором квадраты на верхней грани красного (штриховка), а на нижней — черного цвета. Внутренние черные и красные грани нужно расположить так, как показано на рисунке. Верхнюю половину фигуры снимите и положите справа; *б* — каждый столбик повернуть на 90° в направлении, указанном стрелками. В результате квадраты на нижней грани левой половинки должны стать красного, а на верхней грани правой половинки — черного цвета; *в* — повернуть столбики, из которых состоит каждая половинка, так, чтобы грани *А* совпали; *д* — сложить каждый столбик пополам так, чтобы слева оказались сложенными черные, а справа — красные (лицевые) грани; *е* — правую половинку поставьте на левую. Второй вариант модельки завершен.

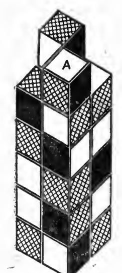


Рис. 19. Игра в «Разноцветную башню».

иями другого, и если оба куба одинаково ориентировать, то каждый кубик в одном из них занимает место, диагонально противоположное тому, которое он занимал бы в кубе, сложенном вторым способом.

Лионс обнаружил, что, сложив куб, можно выбрать новый образец из оставшихся 21 кубика, а из остальных 20 выбрать 8 кубиков и построить из них куб размером $2 \times 2 \times 2$, раскрашенный так же, как образец. Мало кто добивается успеха, не зная, что новый образец должен быть зеркальным отражением старого, а нужные восемь кубиков — это как раз те, которые остаются от шестнадцати, когда вы выбираете кубики для первой модели.

Известно много других головоломок с разноцветными кубиками. Приведенные ниже задачи, в которых нужно сложить фигуры размером $2 \times 2 \times 2$, заимствованы у Ф. Винтера. Во всех моделях должно выполняться «правило домино», требующее, чтобы соприкасались грани лишь одинакового цвета. Вот эти модели.

1. Левая и правая грани куба окрашены в один цвет, передняя и задняя — в другой. Верхняя грань окрашена третьей краской, а нижняя — четвертой.

2. Две противоположные грани окрашены одинаково, а остальные четыре — четырьмя разными красками.

3. Левая и правая грани окрашены одной краской, передняя и задняя грани — другой. Верх и низ раскрашены всеми четырьмя оставшимися красками (на каждой грани — по четыре квадрата разного цвета).

4. Каждая грань раскрашена четырьмя красками, одними и теми же для всех граней.

Невозможно, по-видимому, сложить куб размером $2 \times 2 \times 2$, у которого передняя и задняя грани были бы одного цвета, правая и левая — другого, а верх и низ —

третьего и при этом все маленькие кубики соприкасались бы одинаковыми гранями. Можно построить куб размером $3 \times 3 \times 3$ с гранями всех шести цветов, но нарушить при этом правило домино.

Для игр типа домино можно использовать любые элементы двумерного и трехмерного домино. В США на прилавках магазинов до сих пор можно встретить интересную игру «Контак» (первые ее образцы были выпущены в 1939 году), в которой используются равносторонние треугольники. Цветные кубики лежат в основе нескольких игр, лучшей из которых я считаю «Разноцветную башню».

Два игрока сидят друг против друга. Перед каждым находится ширма, которую несложно сделать из длинной полосы картона шириной около 25 см, загнув у нее края, чтобы ширма стояла вертикально. Кубики кладут в ящик или в мешок и достают их оттуда по одному.

Каждый игрок вынимает из мешка семь кубиков и прячет их за свою ширму. Начиная игру, первый участник кладет один кубик на середину стола. (Для того чтобы решить, чей ход первый, попросите противника назвать три какие-нибудь краски и после этого бросьте кубик. Если выпадет хоть один из названных цветов, то игру начинает ваш противник. В противном случае начинаете вы.) Второй игрок приставляет к нему свой кубик, причем соприкасающиеся грани должны быть одного цвета. Противники, поочередно добавляя по одному кубику, строят башню, в основании которой лежит квадратный слой из четырех кубиков. Цель каждого играющего — избавиться от всех своих кубиков.

Правила игры состоят в следующем:

1. Прежде чем класть новый слой кубиков, надо закончить предыдущий.

2. Кубик можно класть на любое свободное место, если при этом не нарушаются два требования: во-первых, соприкасаются грани одного цвета, а во-вторых, положенный кубик не помешает достроить слой до конца. Например, на рис. 19 кубик A лежал бы не по правилам, если бы какая-нибудь видимая грань соседнего кубика имела общую сторону с перпендикулярной ей гранью кубика A того же цвета.

3. Если правила игры не позволяют игроку класть свои кубики, он должен взять один кубик из мешка.

Предположим, что этот кубик годится для продолжения игры. Тогда игрок, если ему этого захочется, может сделать ход. Ход пропускается в тех случаях, когда либо правила игры запрещают класть выиутый кубик, либо же игрок почему-то просто не хочет ходить.

4. Если игрок по стратегическим соображеииям хочет пропустить ход, он имеет право делать это когда угодио, но обязательио взяв один кубик из мешка.

5. Партия коичается, когда у одиого из участииков не остается больше кубиков. Победитель получает три очка за выигрыш и по одному очку за каждый кубик, оставшийся у противиика.

6. Когда кубики в мешке кончатся, игроки делают ходы по очереди до тех пор, пока кто-нибудь ие захочет или просто будет выиужден пропустить ход. Тогда его противиик ставит кубики до того момеита, когда пропускающий ходы, иакоиец, сможет или захочет играть дальше. Если оба игрока ие хотят или ие могут, не иарушая правил, продолжать игру, то игра прекращается, а победителем считается тот, у кого осталось меиьше кубиков. Разинца в числе кубиков равиа количеству выигранных очков.

7. Игра продолжается до тех пор, пока кто-иибудь ие иаберет зараиее обусловлеииое число очков.

Поиграв немиого в «Разиоцветиую башню», вы обнаружите самые разиые стратегии. Пусть, иапример, ваш противиик иачал класть иовый слой кубиков, а у вас осталось два кубика. С вашей стороиы было бы ошибкой занять клетку, диагонально противоположиую кубику противника, потому что тем самым вы потеряете возможиость положить оставшийся кубик. Вместо этого вы должны положить свой кубик на соседиюю клетку, чтобы следующим ходом выйти из игры.

Обиаруживая все иовые стратегии, вы иачииаете еще глубже изучать игру, а это в свою очередь приводит к росту вашего мастерства и тем самым увеличивает вероятиость выигрыша.

Я с удовольствием выслушал бы любые предложеиия читателей по улучшеиию этой игры или же сообщения о каких-иибудь иовых играх и головоломках с кубиками. Описаииые 30 разиоцветиых кубиков известны уже более 50 лет, ио и они могут таить в себе еще миого неожиданностей.

Многие головоломки с кубами ещё нуждаются в исследовании. Рассмотрим, например, 57 одноцветных, двухцветных и трехцветных кубиков. Из этого комплекта можно выбрать 27 таких кубиков, каждый из которых покрашен не более чем двумя красками. В свою очередь 27 кубиков можно сложить в большой куб размером $3 \times 3 \times 3$ и использовать его в создании новых головоломок.

Можно взять 30 трехцветных кубиков и попробовать сложить из них фигуры, которые не получались из 30 шестицветных кубиков.

Можно ли, например, сложить из них красный куб, не нарушая при этом обычного требования, чтобы соприкасающиеся грани были одного цвета?

В Англии одно время продавался комплект из восьми цветных кубиков, которые надо было по определенным правилам сложить в один большой куб размером $2 \times 2 \times 2$. Игрушка называлась «Мейблокс», но на коробке было написано, что честь создания ее принадлежит Макмагону.

Во многих странах под разными названиями продается одна и та же популярная головоломка: четыре кубика, выкрашенные каждый четырьмя красками. Нужно уложить их все в ряд так, чтобы каждая сторона получившейся призмы размером 1×4 была образована гранями всех четырех цветов (расположенными в любом порядке). Иногда, вместо того чтобы раскрашивать грани, кубики обклеивают картинками *.

* Приведем схему раскраски таких кубиков. Предполагается, что мы взяли четыре цвета: красный, синий, зеленый и желтый. Развертки четырех кубиков выглядят следующим образом:

I		желтый		II		красный	
	зеленый	желтый	синий		зеленый	желтый	синий
		желтый				синий	
		красный				зеленый	
III		желтый		IV		синий	
	красный	желтый	синий		красный	желтый	синий
		синий				зеленый	
		зеленый				красный	

Правильно сложить такие кубики — задача, как ни странно, отнюдь не легкая. Решение ее можно получить так. Сложить кубики в том порядке, в котором они перечислены, столбиком. При этом кубик I должен быть вверху, а кубик IV — внизу. Потом кубик I следует повернуть против часовой стрелки (если смотреть снизу) на $^1/_4$ оборота, кубик II — на $^1/_2$ оборота, а кубик III — на $^3/_4$ оборота. Заметим, что в исходном положении все кубики обращены

Выше мы рассказали о трех разных решениях для головоломки Макмагона. Задачу о разноцветных кубах мы оставляем читателям для самостоятельного решения.

Докажем, что из 24 цветных квадратов нельзя сложить прямоугольник размером 3×8, не нарушая правил игры. Прежде всего выберем любые четыре квадрата, в каждом из которых есть по два соседних треугольника какого-нибудь одного цвета. Эти квадраты положим в углы прямоугольника, после чего треугольники того же цвета останутся еще в четырнадцати квадратах, а для того чтобы заполнить края, квадратов понадобится ровно четырнадцать. По крайней мере в трех из этих квадратов треугольники выбранного цвета будут диагонально противоположны друг другу, и внутри прямоугольника их придется достраивать тремя дополнительными квадратами, содержащими такие же треугольники. Однако квадратов больше нет (все они уже лежат на краю), поэтому и прямоугольник 3×8 построить невозможно.

ГЛАВА 4

ГАРОЛЬД С. М. КОКСЕТЕР

Математики-профессионалы обычно любят повозиться с математическими головоломками или иногда поиграть в шахматы; для них это способ отвлечься и отдохнуть от серьезных размышлений. В то же время многие талантливые и достаточно образованные изобретатели головоломок знакомы лишь с самыми элементарными сведениями по математике. Гарольд С. М. Коксетер, профессор математики Университета в Торонто, являет собой редкий пример и выдающегося математика, и одновре-

желтой стороной вверх, а синей — вправо. Как найти такое решение, вы сможете прочесть в журнале «Наука и жизнь», № 9 за 1969 год. — *Прим. ред.*

мнению специалиста в не слишком серьезных разделах своей науки.

Гарольд Скотт Макдональд Коксетер родился в 1907 году в Лондоне. Математическое образование он получил в Кембридже, в Тринити-колледже.

Серьезным проблемам математики посвящены его книги «Неевклидова геометрия» (1942), «Правильные политопы» (1948) и «Действительная проективная плоскость» (1955). Что касается не столь серьезных тем, то Коксетер переработал и отредактировал классический труд У. У. Роуза Болла «Математические очерки и развлечения» и написал для многих журналов сотни статей по занимательной математике. В 1961 году увидела свет книга Коксетера «Введение в геометрию» *, которой и будет посвящена эта глава.

Книга замечательна по многим причинам. Прежде всего она необыкновенно всеобъемлюща. Охватывая разнообразные области геометрии, книга знакомит читателя с такими понятиями, которые далеко не всегда можно найти в вводных курсах: неевклидова геометрия, кристаллография, теория групп, правильные решетки, теория геодезических, векторы, проективная геометрия, аффинная геометрия и топология. Книга написана четко и ясно, хорошим математическим языком. Читать ее нужно медленно и внимательно, но вы будете вознаграждены знакомством с обширнейшим материалом, удивительным образом уместившимся в ограниченном объеме. В тексте ощущается свойственное автору чувство юмора, необыкновенное умение видеть математическую красоту и его большая любовь к играм. Главы книги в большинстве своем открываются удачно подобранными цитатами, нередко из Льюиса Кэррола, которые обычно близки по духу всегда занимательным головоломкам самого автора.

Некоторые главы целиком посвящены довольно трудным занимательным задачам, часть которых мы уже разобрали в предыдущей книге «Математические головоломки и развлечения» ** на более элементарном уровне:

* Г. С. М. Коксетер, Введение в геометрию, изд-во «Наука», М., 1966.

** В тех случаях, когда автор ссылается на свой первый сборник математических головоломок, имеется в виду книга: М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971.

золотое сечение, правильные многогранники, топологические забавы, раскрашивание карты, упаковка шаров и т. д.

Текст дополняют всякого рода любопытные и малоизвестные сообщения. Много ли читателей знает, например о том, что в 1957 году компанией «Гудрич» запатентован лист Мёбиуса? В патенте № 2784834 описывается надетый на два шкива резиновый ремень, который используется для транспортировки горячих веществ или абразивов. Перед соединением концов ремня один из них перекручивают на 180°. Тогда грузы могут перемещаться по обеим сторонам ремня или, что то же самое, по одной-единственной его поверхности. (Кстати говоря, компания «Гудрич» не первой запатентовала изобретение, основанное на использовании листа Мёбиуса. В 1923 году был получен патент на бесконечную киноленту в форме листа Мёбиуса, на которой можно было записывать звук с обеих сторон, а в 1949 году — на шлифовальный ремень, также имевший форму листа Мёбиуса. Об этом мне сообщили читатели, поэтому вполне возможно, что существуют и другие изобретения, о которых я просто не знаю.)

Многим ли известно, что в Геттингенском университете стоит огромный ящик с рукописью, в которой описано построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами с помощью циркуля и линейки? Построение многоугольника с простым числом сторон возможно лишь при условии, если это число имеет особый вид — выражается формулой

$$2^{2^n} + 1.$$

Такие числа называются числами Ферма. Известно всего пять таких чисел: 3, 5, 17, 257 и 65 537. Коксетер пишет, что бедняга, которому удалось осуществить построение, бился над задачей десять лет. Никто не знает, существует ли многоугольник, число сторон которого выражалось бы бóльшим простым числом и построение которого было бы возможно с помощью циркуля и линейки. Если такой многоугольник и существует, то его построение все равно довольно бессмысленно, ибо у него должно быть астрономическое число сторон.

Может показаться, что треугольник (многоугольник самого низкого порядка), столь тщательно изученный

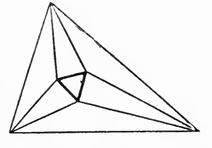


Рис. 20. Теорема Морлея.

в древности, не таит в себе больше ничего неожиданного. Однако только за последние десятки лет было найдено много замечательных теорем о треугольнике, которые в свое время мог бы открыть Евклид. Одним из выдающихся примеров, рассмотренных Коксетером, является теорема Морлея, которую впервые открыл в 1899 году Фрэнк Морлей, профессор математики университета Джона Гопкинса и отец писателя Кристофера Морлея. Коксетер пишет, что слух об открытии мгновенно разнесся среди математиков, но до 1914 года не было опубликовано ни одного доказательства.

Теорема Морлея ясна из рис. 20, где изображен произвольный треугольник, все углы которого поделены на три части. Отрезки прямых, делящих углы, всегда пересекаются в вершинах равностороннего треугольника, известного под названием треугольника Морлея. Именно этот маленький равносторонний треугольник и поразил математиков. Несмотря на то что профессор Морлей написал несколько учебников и работал во многих не менее важных областях математики, своим бессмертием он обязан именно этой теореме. Почему же ее не открыли раньше? Коксетер видит причину в том, что в рамках классической математики невозможно разделить угол на три равные части, и математики, зная это, старались избегать теорем, касающихся трисекции угла. В книге Коксетер приводит свое доказательство теоремы Морлея.

Задача о биссектрисе внутреннего угла, известная также под названием теоремы Штейнера — Лемуса, обсуждается в литературе еще шире, чем треугольник Морлея. Теорему впервые предложил в 1840 году С. Л. Лемус, а Штейнер первым ее доказал. История доказательства подробно изложена во многих статьях и учебниках.

Другую теорему о треугольнике иллюстрирует рис. 21. В последнее время она приобрела широкую известность.

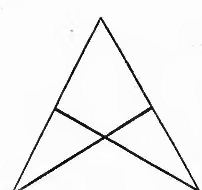


Рис. 21. Задача о биссектрисах внутренних углов.

Если биссектрисы двух внутренних углов при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Попробуйте-ка это доказать! В элементарной геометрии нет ни одной более коварной задачи. Обратная теорема (в равностороннем треугольнике биссектрисы углов при основании равны) восходит еще к Евклиду и доказывается очень просто. Доказательство прямой теоремы на первый взгляд представляется не менее простым, но на самом деле оказывается весьма сложной задачей. В свое время А. Хендерсон опубликовал десять длинных и запутанных доказательств этой теоремы. Он назвал свою работу (объемом почти 40 страниц) «Заметка по поводу задачи о биссектрисах внутренних углов». В книге Коксетера читателя ждет приятная неожиданность — новое необыкновенно простое доказательство, для которого требуется провести всего лишь четыре вспомогательные линии.

Открыв изящную теорему, автору иногда вдруг хочется изложить ее смысл в стихах. Забавный тому пример — поэма «Точный поцелуй», написанная известным химиком Фредериком Содди, «изобретателем» слова «изотоп». Если три окружности любого размера расположены так, что каждая касается двух других, то всегда существует четвертая окружность, касающаяся трех данных.

Обычно четвертую окружность можно провести двумя способами, один из них — описать большую окружность вокруг трех маленьких. Два возможных решения изображены пунктиром на рис. 22. Как соотносятся между собой размеры четырех соприкасающихся окружностей? Позже Содди признался, что ему так и не удалось понять, каким образом он получил красивую симметрич-

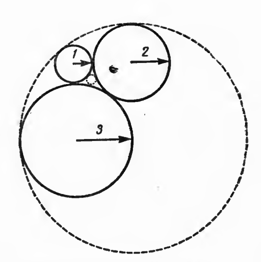


Рис. 22. «Точный поцелуй» Фредерика Содди.

ную формулу, приведенную ниже (a, b, c и d — величины, обратные радиусам окружностей):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (^1/_2)(a + b + c + d)^2.$$

Величина, обратная числу n, определяется как $1/n$; дробь, обратная данной, получается перестановкой числителя и знаменателя. Величина, обратная радиусу, равна кривизне окружности. Кривизна вогнутой кривой (например, большой окружности, проведенной вокруг трех маленьких) считается отрицательной и определяется отрицательным числом. В поэме Содди вместо термина «кривизна» употребляется слово «изгиб». Вот отрывок из поэмы, цитируемый Коксетером:

Определим изгиб кривой
Как радиус обратный.
Он просто связан с кривизной,
И это всем понятно.
  Прямая линия изгиб
  Имеет нулевой,
  И отрицательный изгиб —
  У вогнутой кривой.

Четыре круга как-то раз
Поцеловались в поздний час.
Евклид об этом не узнал:

Он о любви не думал,
А я круги нарисовал
И формулу придумал:
Сумма квадратов всех изгибов
Равна половине квадрата их суммы.

Любителям головоломок формула Содди позволяет значительно экономить время; задачи о соприкасающихся окружностях, которые часто предлагаются в учебниках геометрии, без этой формулы одолеть нелегко. Вот вам пример: каковы радиусы окружностей, проведенных пунктиром на рис. 22, если радиусы трех сплошных окружностей равны 1, 2 и 3 см? Для решения задачи можно, конечно, нарисовать много прямоугольных треугольников и, настойчиво применяя к ним теорему Пифагора, вычислить радиус, а по формуле Содди получается простое квадратное уравнение, два корня которого обратны искомым радиусам. Положительный корень $^{23}/_{6}$, равный кривизне маленькой пунктирной окружности, соответствует радиусу $^{6}/_{23}$ см. Отрицательный корень $(-^{1}/_{6})$ равен кривизне большой окружности; следовательно, ее радиус равен 6 см.

Интересующиеся читатели могут проверить эту формулу для другой задачи. Пусть, например, в плоскости проведена прямая, на которой находятся точки касания с плоскостью двух соприкасающихся между собой сфер, имеющих радиусы 4 и 9 см. Надо вычислить наибольший радиус сферы, которую можно положить на эту плоскость так, чтобы все три сферы соприкасались, а точки их касания с плоскостью лежали бы на одной прямой. Для решения этой задачи можно вместо формулы Содди воспользоваться сильно упрощающим вычисление соотношением Коксетера. Если величины a, b и c, обратные трем радиусам, заданы, то величина, обратная четвертому радиусу, входящему в формулу Содди, равна

$$a + b + c \pm 2\sqrt{ab + bc + ac}.$$

Книга Коксетера богата иллюстрациями, самые интересные из них относятся к разделам, посвященным вопросам симметрии и роли теории групп в составлении повторяющихся узоров, которые мы привыкли видеть на обоях, на кафельных и паркетных полах и т. д. «Мате-

матик — такой же творец узоров, как художник или поэт, — цитирует Коксетер слова английского математика Г. Г. Харди. — Если математические узоры оказываются более устойчивыми, чем стихи или полотна художника, то это происходит лишь потому, что они сотканы из *идей*».

Узор, составленный из нигде не перекрывающихся многоугольников, между которыми нет промежутков, называется мозаикой или паркетом. Правильной называется мозаика, целиком состоящая из одинаковых правильных многоугольников, расположенных так, что они имеют общие вершины (иначе говоря, вершина одного многоугольника не может совпадать с внутренней точкой стороны какого-нибудь другого многоугольника). Правильных мозаик всего три: мозаика из правильных треугольников, напоминающая шахматную доску, мозаика из квадратов и мозаика из правильных шестиугольников, представление о которой могут дать пчелиные соты и шестиугольные плитки, которыми бывают выложены полы в ванных комнатах. Квадратами и треугольниками можно заполнить всю плоскость и в том случае, если их вершины не будут совпадать. Шестиугольники для этой цели не годятся.

«Полуправильными» мозаиками называются такие, в которых правильные многоугольники двух или большего числа видов, имеющие общие вершины, располагаются в одной и той же циклической последовательности вокруг каждой из вершин. Известно ровно восемь таких мозаик, составленных из различных комбинаций треугольников, квадратов, шестиугольников, восьмиугольников и двенадцатиугольников (рис. 23). Все они могут служить прекрасными образцами для разрисовки линолеума. Эти мозаики не меняются при отражении в зеркале, за исключением правого нижнего рисунка, который впервые описал Кеплер. Существуют две зеркальные разновидности этого узора. Если раскрасить в разные цвета несколько десятков картонных многоугольников нужного размера и формы, то можно прекрасно провести время, составляя из них мозаики. Отказавшись от всяких ограничений на расположение многоугольников в вершинах, вы сможете из одного и того же набора сложить бесконечно много разнообразных мозаик. (Некоторые удивительные примеры этих

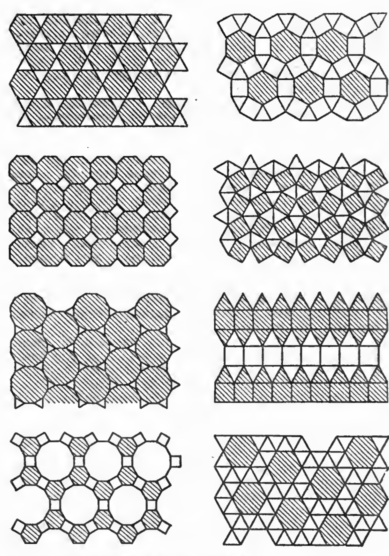


Рис. 23. Восемь «полуправильных» мозаик.

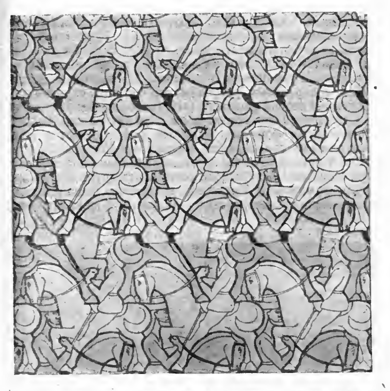


Рис. 24. Мориц Эшер. Математическая мозаика «Всадник на коне».

неправильных, но симметричных мозаик можно найти в книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп».)

Плоские мозаики, составленные из повторяющихся узоров, принадлежат семнадцати различным группам симметрии, исчерпывающим все существенно различные способы заполнения узорами двумерного пространства. Элементами этих групп являются операции, производимые с одной и той же «фундаментальной» областью: перемещение ее в плоскости, поворот или отражение в зеркале. Семнадцать групп симметрии играют очень важную роль в кристаллографии. Коксетер рассказывает о том, как в 1891 году русский кристаллограф Е. С. Федоров впервые доказал, что число этих групп равно

семнадцати. «Искусство разрисовывания плоскости повторяющимся орнаментом, — пишет Коксетер, — достигло своего расцвета в Испании XIII века, когда мавры использовали все семнадцать групп симметрии, изощряясь в украшении Альгамбры. Предпочтение, отдаваемое абстрактным рисункам, объяснялось строгим соблюдением второй заповеди («Не сотвори себе кумира»)».

Совершенно не обязательно ограничиваться только абстрактными формами. Коксетер рассказывает о изобретательном голландском художнике Морице Эшере, который брал в качестве фундаментальных областей фигуры животных и на основе семнадцати групп составлял разные мозаики. У Коксетера приводится одна из удивительнейших эшеровских мозаик (показана на

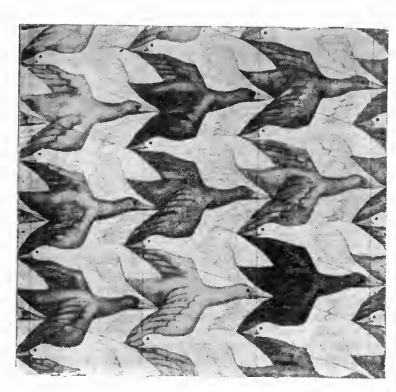


Рис. 25. Мориц Эшер. Мозаика «День и ночь».

рис. 24) — «Всадник на коне». Другая его мозаика изображена на рис. 25. Коксетер пишет, что на первый взгляд мозаика «Всадник на коне» получается простым перемещением базисного рисунка вдоль вертикальных и горизонтальных осей; но при ближайшем рассмотрении оказывается, что фон образован тем же рисунком. Еще более интересная группа симметрии для этого орнамента реализуется с помощью так называемых скользящих отражений: параллельный перенос фигуры и одновременное отражение ее в зеркале. Строго говоря, рассмотренный рисунок нельзя назвать мозаикой, потому что его повторяющийся элемент не является многоугольником. Это пример орнамента, принадлежащего к необычному классу мозаик, составленных из абсолютно одинаковых фигур неправильной формы, плотно подогнанных друг

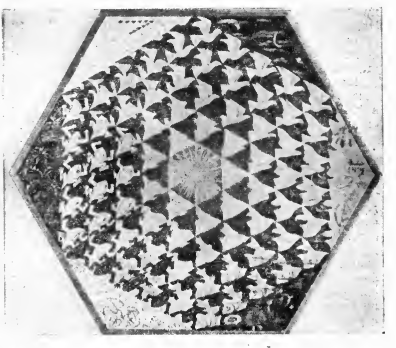


Рис. 26. Мориц Эшер. «Слово» (литография).

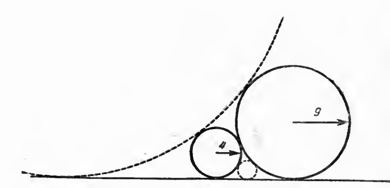


Рис. 27. Ответ к задаче о «целующихся» сферах.

к другу. (Известна похожая головоломка, в которой из кусочков зигзагообразной формы нужно сложить кубик.) Элементы мозаики просто сделать, если они имеют какую-нибудь абстрактную форму, но их изготовление становится далеко не легкой задачей, когда мозаика составлена из фигур людей или животных.

На рис. 26 изображена одна из известных мозаик Эшера — литография «Слово», созданная художником в 1942 году. По словам самого Эшера, мозаика иллюстрирует библейское толкование сотворения мира. «Из серого тумана в центре картины («вначале было слово») появляются треугольные фигуры. По мере удаления от центра контраст между светлыми и темными пятнами усиливается, а первоначальные прямые линии начинают причудливо изгибаться. Белые участки становятся фоном для черных, а черные рисунки в свою очередь образуют фон, на котором расположены белые. На краях картины странные фигуры превращаются в птиц, рыб и лягушек, живущих каждая в своей среде: в небе, в воде и на земле. Одновременно происходит постепенное превращение птицы в рыбу, рыбы — в лягушку, а лягушки — опять в птицу. Из-за этих превращений зритель явственно ощущает, будто фигуры движутся по часовой стрелке».

Более подробно о математическом искусстве Эшера говорилось в апрельском номере журнала *Scientific American* за 1966 год. Там же приведен и список литературы.

Я предлагал читателям определить, чему равен наибольший радиус сферы, которая касается плоскости и еще двух соприкасающихся между собой сфер, если все точки касания трех сфер с плоскостью расположены на одной прямой в той же плоскости, а две сферы имеют радиусы, равные 4 и 9 см. На рис. 27 изображено сечение сфер плоскостью, перпендикулярной касательной плоскости и проходящей через прямую, на которой расположены точки касания. Очевидно, что, рассматривая прямую как окружность с кривизной, равной нулю, можно свести задачу к проблеме четырех «целующихся» окружностей. Формула Фредерика Содди из «Точного поцелуя» дает для радиусов двух пунктирных окружностей значения $1^{11}/_{25}$ и 36 см. Большая окружность представляет собой экваториальное сечение искомой сферы.

ГЛАВА 5

БРИДЖ-ИТ* И ДРУГИЕ ИГРЫ

«Человеческая изобретательность ни в чем не проявляется так, как в играх», — писал Лейбниц Паскалю.

В такие математические игры, как шашки, крестики и нолики, европейские и японские шахматы, обычно играют вдвоем. Все эти игры, во-первых, всегда завершаются после конечного числа ходов, во-вторых, в них отсутствует элемент случайности, вносимый, например, картами или игральными костями, и, наконец, в-третьих, в течение всей игры противники видят все ходы друг друга. Если оба участника играют «рационально» (то есть в соответствии с оптимальной стратегией), то исход игры предопределен с самого начала. Игра кончается либо вничью, либо победой одного из участников: кто одержит верх — тот, кто начинает, или тот, кто делает второй ход? В этой главе мы сначала расскажем о двух

* Bridg-it по-английски звучит так же, как женское имя Бриджит. Название игры можно перевести как «Перебрось мостик». — *Прим. перев.*

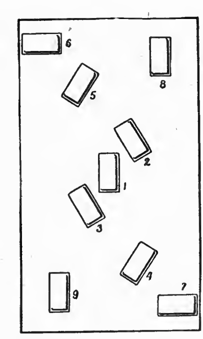


Рис. 28. Игра с выкладыванием домино на прямоугольную доску. Выигрывает тот, кто положит последнюю кость.

простых играх, для которых известны оптимальные стратегии. Затем мы рассмотрим популярную настольную игру, выигрышную стратегию для которой обнаружили совсем недавно, и, наконец, целый класс игр, до сих пор не исследованных.

Для игр, в которых участники ставят фишки на доску или, наоборот, снимают их с нее, оптимальной является так называемая симметричная стратегия. В качестве классического примера рассмотрим такую игру. Участники по очереди кладут кости домино на прямоугольную доску, располагая их как угодно. Костей должно быть достаточно для того, чтобы полностью покрыть всю доску. Выигрывает тот, кому удается положить последнюю кость домино. Вничью игра кончиться не может, поэтому возникает вопрос: кому достанется победа, если оба участника играют рационально? Оказывается, что верх в такой ситуации одерживает участник, которому принадлежит первый ход. Его стратегия заключается в том, чтобы положить первую кость домино точно в центр доски (рис. 28), а все остальные кости укладывать симметрично по отношению к выложенным противником. Совершенно очевидно, что если противнику удастся найти на доске свободное местечко, то обязательно будет свободно и второе место, расположенное симметрично тому, которое занял противник.

Описанная стратегия применима и в том случае, когда вместо костей домино используются любые другие

плоские фигуры, не меняющие своей формы при повороте на 180°. Например, эта же стратегия будет оптимальной, если доску надо целиком покрыть греческими крестами, однако для фигур Т-образной формы стратегия меняется. Посмотрим, годится ли эта стратегия, если укладывать на доске сигарообразные элементы. Ответ может показаться несколько странным: стратегия верна, однако нельзя забывать, что концы сигары имеют различную форму, и поэтому самую первую сигару надо поставить вертикально, обрезанным концом вниз! Придумывать такие игры весьма несложно. Договорившись заранее о правилах игры, можно выбрать любые доски и заполнять их фигурами самой разнообразной формы. В одних случаях симметричная стратегия гарантирует выигрыш первому или второму игроку, в других оптимальной стратегии не существует.

Совсем иной тип симметричной стратегии приносит победу в следующей игре. На столе выкладывается окружность из соприкасающихся друг с другом монет. Ходы делаются по очереди; за один ход можно взять либо одну, либо две монеты, лежащие рядом. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. В этой игре участник, делающий ход вторым, всегда может победить. После того как его противник первым ходом возьмет со стола одну или две монеты, окружность превратится в изогнутую цепь с двумя концами. Если цепь состоит из нечетного числа монет, то игрок, делающий второй ход, должен взять монету, равноудаленную от концов цепи. Если же число монет в цепи четно, то он берет две монеты из середины цепи. В обоих случаях оставшиеся монеты образуют две цепи одинаковой длины. Какие бы монеты ни брал теперь противник из одной цепи, второй игрок должен следующим ходом взять монеты, лежащие на аналогичных местах во второй цепи.

Стратегии, подобные тем, с которыми вы только что познакомились, в теории игр называют иногда парными стратегиями. В этом названии подчеркивается, что вся игра как бы разбивается на парные ходы, а оптимальная стратегия предполагает, что если один участник сделал какой-нибудь ход, то ход противника (не обязательно симметричный) должен принадлежать к той же паре ходов. В качестве наиболее яркого примера игр с парной стратегией можно привести топологическую

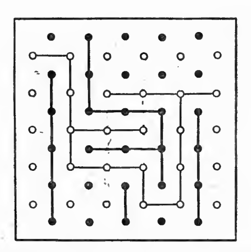


Рис. 29. Законченная партия в бридж-ит. «Светлые» выиграли.

игру бридж-ит, которая уже лет десять служит одним из любимых детских развлечений. Об этой игре уже говорилось в главе 22 книги «Математические головоломки и развлечения».

На рис. 29 показана доска для игры в бридж-ит. Если игровое поле нарисовано на листе бумаги, то участники по очереди проводят вертикальные или горизонтальные линии, соединяющие две точки одного цвета. Соединять точки, расположенные по диагонали, нельзя. Один из противников соединяет черным карандашом черные точки, второй соединяет точки другого цвета, вооружившись такого же цвета карандашом. Линии противников нигде не должны пересекаться. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны доски «своего» цвета. В течение многих лет было известно, что существует стратегия, которая обеспечивает победу игроку, делающему первый ход, но найти ее удалось не сразу. Открыл ее О. Гросс, специалист по теории игр. Я написал Гроссу письмо с просьбой сообщить мне подробности, рассчитывая получить длинный и сложный анализ задачи, наверняка недоступный для широкого читателя. К моему удивлению, все объяснение состояло из чертежа, вос-

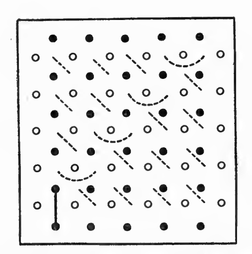


Рис. 30. Стратегия, обеспечивающая выигрыш в бридж-ит.

произведенного на рис. 30, и двух следующих фраз: «Вы начинаете игру и делаете ход, обозначенный черной линией в левом нижнем углу чертежа. Дальше надо играть так: каждый раз, когда прямая, проведенная противником, пересекает конец какой-нибудь пунктирной кривой, вы должны проводить прямую, пересекающую второй конец той же кривой». Эта остроумная парная стратегия обеспечивает победу тому, кто делает первый ход, но число всех ходов не будет минимальным. Сам Гросс так охарактеризовал описанную стратегию: она представляет собой «тупое оружие против тупого игрока, хитрое — против хитрого, но и в том и в другом случае ведет к победе».

Гросс придумал немало парных стратегий, но выбрал именно ту, о которой мы только что рассказали. Эта стратегия обладает двумя важными преимуществами: во-первых, она очень последовательна, во-вторых, она легко обобщается на случай любых размеров игрового поля.

Обратите внимание на то, что на чертеже заранее не предусмотрены линии, соединяющие граничные точки доски. Правила игры в бридж-ит не запрещают такие линии, но проводить их бессмысленно, потому что они

не ускоряют победу. Если вы играете так, как показано на чертеже, а ваш противник вдруг проводит прямую вдоль границы доски, то вам надо сделать контроход, соединив либо две граничные, либо, если вам это больше понравится, любые две точки доски. Может оказаться, что именно этот случайный ход вам будет потом продиктован стратегией, тогда, поскольку вы его уже сделали, проведите какую-нибудь другую линию. Лишняя линия на доске никогда не может быть помехой, а в некоторых случаях даже дает кое-какие преимущества. Разумеется, теперь, когда известна оптимальная стратегия для первого игрока, бридж-ит утрачивает всю свою привлекательность. Играть в нее могут лишь те, кто еще не слышал этой «печальной» новости.

Несмотря на сравнительно простые правила, многие игры, для которых нужны специальные игровые поля, не поддаются никакому математическому анализу. В конце прошлого века в Англии широкой известностью пользовалась игра халма, от которой пошло целое семейство игр, до сих пор не исследованных математиками.

В 1898 году Бернард Шоу писал: «У англичан принято, чтобы члены каждой отдельной семьи, живущей в отдельном доме, сидели в отдельных комнатах и либо молча читали книгу или газету, либо играли в халму...»

Вначале в халму играли на шахматной доске размером 16×16 (название игры происходит от греческого слова, значащего «скачок», «прыжок»). Затем начали использовать доски самых разнообразных размеров и формы. Игра, известная ныне под названием «китайские шашки», является одной из многих более поздних разновидностей халмы. Я расскажу здесь лишь об одном упрощенном варианте халмы, в который играют на обычной шахматной доске размером 8×8 клеток. Она приводит к одной забавной и все еще не решенной головоломке из области раскладывания пасьянсов.

В начале игры шашки расставляются на доске, как обычно. Ходы делаются почти так же, как в шашках, но с некоторыми изменениями:

1) запрещается передвигать шашку, которая только что перепрыгнула через другую;

2) перепрыгивать можно через шашки как своего, так и чужого цвета;

3) разрешаются ходы и прыжки назад.

За один ход можно последовательно перескочить через несколько шашек любого цвета, стоящих по диагонали через клетку, но комбинировать такой ход с обычным ходом (без перескакивания) запрещается. Каждый игрок стремится занять первоначальную позицию противника, и выигрывает тот, кому первому удается это сделать. Выиграть можно и в том случае, когда в создавшейся на доске ситуации противник не может больше сделать ни одного хода.

Некоторое представление о том, как сложно анализировать игры типа халмы, вы получите, поразмыслив над следующей головоломкой. На четных квадратах трех первых рядов доски расставьте обычным образом двенадцать шашек, оставив свободными все остальные клетки. Какое минимальное число ходов вам понадобится, чтобы переправить все шашки в три ряда на противоположную сторону доски? Ходы делаются по правилам халмы, то есть шашку можно, во-первых, переставлять на соседнюю черную клетку вперед или назад по диагонали и, во-вторых, разрешается перескакивать через одну или несколько шашек, стоящих через клетку по диагонали. Перескакивая через шашки, можно возвращаться назад, а потом опять двигаться вперед; если шашки стоят через клетку, то весь этот сложный скачок можно делать за один ход. Так же как в халме, совсем не обязательно перескакивать через все возможные шашки; серию последовательных прыжков разрешается обрывать в любом месте независимо от того, может она быть продолжена или нет.

Решая задачу, удобно нумеровать черные клетки доски слева направо и сверху вниз цифрами от 1 до 32.

ОТВЕТЫ

Задача о том, как с помощью ходов, разрешенных правилами халмы, переместить двенадцать шашек с одного края доски на противоположный, вызвала многочисленные отклики читателей. Одни считали возможным решить эту задачу в 23 хода, другие в 22 или 21 ход, третьим оказалось достаточно 20 ходов. Однако никто не доказал, что минимальное число ходов равно 20, но

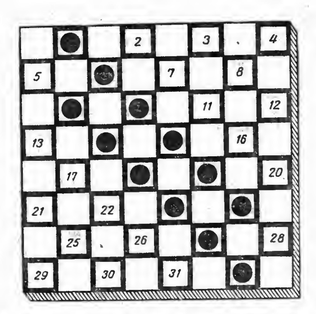


Рис. 31. Позиция на шашечной доске после 10 ходов игры в халму.

во многих письмах приводилось простое доказательство того, что задача решается не меньше чем в 16 ходов.

В начале игры шашки располагаются так: восемь шашек занимают нечетные ряды 1 и 3, а четыре шашки стоят в четном ряду 2. В конце восемь шашек находятся в двух четных рядах 6 и 8, а четыре шашки занимают нечетный ряд 7. Мы видим, что четыре шашки изменили четность. Для этого каждая из них должна была по крайней мере один раз перескочить через клетку и один раз перейти на клетку, ближайшую по диагонали. Если сложить число всех ходов, то получится как раз шестнадцать.

Трудно себе представить, как можно переместить шашки меньше чем за 20 ходов. Должен, правда, признаться, что, когда я впервые сформулировал эту задачу, решение, состоящее всего лишь из 20 ходов, казалось мне столь же невозможным. Пронумеруем черные квадраты на шахматной доске слева направо и сверху вниз цифрами от 1 до 32, повернув доску так, чтобы в левом

верхнем углу был белый квадрат. Тогда 20 ходов, необходимые для решения задачи, будут выглядеть так:

1. 21—17	11. 14—5
2. 30—14	12. 23—7
3. 25—9	13. 18—2
4. 29—25	14. 32—16
5. 25—18	15. 27—11
6. 22—6	16. 15—1
7. 17—1	17. 8—4
8. 31—15	18. 24—8
9. 26—10	19. 19—3
10. 28—19	20. 16—12

Приведенное решение симметрично. На рис. 31 показано расположение шашек после десятого хода. Если теперь повернуть доску на 180° и повторить все ходы в обратном порядке, то задача будет решена. Насколько мне известно, это далеко не единственное решение в 20 ходов. Мы получили от читателей самые разнообразные симметричные решения из 20 ходов, но одно из решений оказалось несимметричным.

ГЛАВА 6

ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

1. Сортировка монет. Разложите в ряд два полтинника и три пятака, как показано в верхней части рис. 32. Задача состоит в том, чтобы, сделав минимальное число ходов, построить ряд, изображенный на том же рисунке внизу.

Ход делается так. Надавите двумя пальцами, например средним и указательным, на две лежащие рядом монеты, выдвиньте их вверх из ряда и переставьте на любое место воображаемой прямой, обозначенной

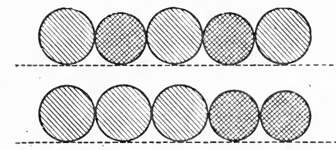


Рис. 32. Головоломка с полтинниками и пятаками.

пунктиром. Взятые вами две монеты должны все время касаться друг друга, и их нельзя менять местами: левая монета в паре должна быть все время слева, правая — справа. Перекладывая монеты, между отдельными парами можно оставлять любые промежутки, но в конце концов все промежутки должны заполниться. Не обязательно вся цепочка целиком должна находиться на прежнем месте, она может сдвинуться по пунктирной прямой.

Если бы разрешалось перемещать две одинаковые монеты, то головоломка легко решалась бы в три хода: монеты 1 и 2 передвигаются налево (1), их место занимают монеты 4 и 5 (2), а монеты 5 и 3 перемещаются с правого конца на левый (3). Однако при наложенных ограничениях (передвигаемые монеты обязательно должны быть разными) головоломка становится красивой и сложной.

2. Сколько времени уйдет на поджаривание хлеба? Даже в обычном домашнем хозяйстве можно найти сложные задачи из области исследования операций. Предположим, что нам нужно приготовить три поджаренных и намазанных маслом кусочка хлеба. У нас имеется тостер с двумя дверцами по бокам, за один раз в него можно положить два ломтика хлеба, но каждый ломтик будет поджариваться только с одной стороны. Чтобы поджарить каждый кусок с обеих сторон, надо открыть дверцы и перевернуть ломтики. Требуется 3 секунды на то, чтобы положить в тостер ломтик хлеба, 3 секунды на то, чтобы вынуть его оттуда, и 3 секун-

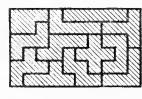
ды для того, чтобы перевернуть кусок на другую сторону, не вынимая его из тостера. Каждая из этих операций выполняется обеими руками, то есть вы не можете класть в тостер, вынимать или переворачивать одновременно два куска; также невозможно один кусок намазывать маслом, а со вторым в это время орудовать у тостера. Время поджаривания ломтика хлеба с одной стороны составляет 30 секунд; чтобы намазать хлеб маслом, требуется еще 12 секунд.

Каждый кусок намазывается маслом только с одной стороны, причем не раньше, чем эта сторона поджарится. Намазав поджаренный кусок с одной стороны, его можно положить обратно в тостер для поджаривания второй стороны. С самого начала тостер уже нагрет. Каков самый короткий промежуток времени, за который можно поджарить с обеих сторон и намазать маслом три куска хлеба?

3. Две головоломки с пентамино. Любителям пентамино предлагаются две новые головоломки: одна простая, а вторая — посложнее.

A. Прямоугольник 6×10, изображенный на рис. 33 слева, составлен из двенадцати элементов пентамино. Разрежьте этот прямоугольник вдоль черных линий на такие две части, из которых можно сложить фигуру с тремя отверстиями, показанную на том же рисунке справа.

B. Сложите из двенадцати пентамино прямоугольник 6×10, причем так, чтобы каждый элемент касался какой-нибудь стороны этого прямоугольника. Известно, что из нескольких тысяч различных способов составления прямоугольника 6×10 (фигуры, переходящие друг в друга при повороте или отражении, не считаются



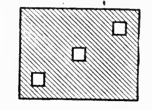


Рис. 33. Задача с пентамино.

разными) только два удовлетворяют поставленному условию. Несимметричные куски разрешается переворачивать и класть на стол любой стороной.

4. Теорема о неподвижной точке. Однажды утром, как раз в тот момент, когда взошло солнце, один буддистский монах начал восхождение на высокую гору. Узкая тропа шириной не более одного-двух футов вилась серпантином по склону горы к сверкающему храму на ее вершине.

Монах шел по дорожке с разной скоростью; он часто останавливался, чтобы отдохнуть и поесть сушеных фруктов, которые взял с собой. К храму он подошел незадолго до захода солнца. После нескольких дней поста и размышлений монах пустился в обратный путь по той же тропе. Он вышел на рассвете и опять спускался с неодинаковой скоростью, много раз отдыхая по дороге. Средняя скорость спуска, конечно, превышала среднюю скорость подъема.

Докажите, что на тропе есть такая точка, которую монах во время спуска и во время подъема проходил в одно и то же время суток.

5. Две головоломки с цифрами. В двух приведенных ниже задачах нужно за разумный промежуток времени перебрать сотни комбинаций цифр, поэтому на первый взгляд кажется, что для их решения необходима вычислительная машина. Однако при правильном подходе, придумав одну-две хитрости, вы сможете решить обе задачи почти в уме. Именно такие неожиданные упрощения задачи нередко позволяют хорошему программисту экономить машинное время, а в отдельных случаях вообще не прибегать к помощи машины.

А. «Квадратный корень из WONDERFUL» * — так называлась одна из пьес, шедших на Бродвее. Пусть каждая буква в слове WONDERFUL означает какую-нибудь цифру (кроме нуля), а слово OODDF (в тех же обозначениях) — квадратный корень из слова WONDERFUL. Чему равен этот корень?

Б. Девять цифр (нуль в их число не входит) можно многими способами разместить в клетках квадрата

* Wonderful — прекрасный, чудесный (*англ.*).

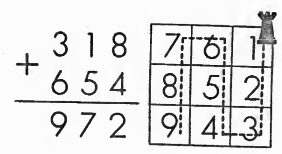


Рис. 34. Можно ли вписать цифры в клетки квадрата так, чтобы он обладал свойствами обоих изображенных здесь квадратов?

3 × 3, чтобы число, стоящее в нижней строке, было равно сумме двух верхних чисел. В примере, показанном на рис. 34 слева, нижнее число 972 равно сумме чисел 318 и 654, стоящих в первых двух строках. Известно немало вариантов и такой расстановки цифр в квадрате, когда ходом ладьи их все можно обойти по порядку, не пропустив ни одной (рис. 34, справа). Начав с 1 ходом шахматной ладьи (по одной клетке за каждый ход), вы обойдете по очереди все клетки с 2 до 9, переходя каждый раз к цифре, которая на единицу больше предыдущей.

Задача состоит в том, чтобы построить квадрат, сочетающий в себе оба свойства. Иными словами, надо так расставить цифры в клетках квадрата, чтобы, во-первых, их можно было обойти ходом ладьи (двигаясь по порядку от 1 к 9) и, во-вторых, чтобы трехзначное число в нижнем ряду равнялось сумме чисел, стоящих в двух верхних рядах. Решение этой задачи единственно.

6. Каким образом удалось Канту поставить верное время? Известно, что Кант был холостяком и имел столь укоренившиеся привычки, что жители Кенигсберга, завидев, как он проходит мимо того или иного дома, могли проверять по нему свои часы.

Однажды вечером Кант с ужасом обнаружил, что его стенные часы отстали. Очевидно, слуга, который в тот день уже кончил работать, забыл их завести. Великий философ никак не мог узнать, который час, ибо его наручные часы находились в ремонте, поэтому он не стал

переставлять стрелки, а пошел в гости к своему другу Шмидту, купцу, жившему примерно в миле от Канта. Войдя в дом, Кант взглянул на часы в прихожей и, пробыв в гостях несколько часов, отправился домой. Он возвращался по той же дороге, что и всегда, медленной, степенной походкой, которая не менялась у него в течение двадцати лет. Кант не имел ни малейшего представления о том, сколько времени он шел домой (Шмидт незадолго до этого переехал, и Кант еще не успел определить, сколько времени требуется ему для того, чтобы пройти от дома Шмидта до собственного дома). Однако, войдя в свой дом, он сразу же поставил часы правильно. Каким образом Кант сумел узнать верное время?

7. Игра в двадцать вопросов с известным распределением вероятности появления загаданных предметов. В хорошо известной игре в двадцать вопросов один человек задумывает какой-нибудь предмет, например филадельфийский Колокол Свободы или мизинчик на левой ноге знаменитой балерины, а другой человек, задавая вопросы, пытается отгадать задуманное.

Спрашивающий имеет право задать не более двадцати вопросов, причем вопросы должны быть такими, чтобы на них можно было ответить либо «да», либо «нет». Лучше всего задавать вопросы, которые позволяют разделить множество всех возможных предметов на две как можно более равные части. Пусть, например, вместо предметов задумана какая-то из девяти цифр от 1 до 9. Чтобы отгадать ее, понадобится не более четырех, а может быть и меньше, вопросов. Двадцати вопросов достаточно для отгадывания любого из 1 048 576 чисел от 1 до 2^{20}.

Припишем каждому предмету определенное число — вероятность того, что выберут именно этот предмет. Пусть, например, колода карт состоит из одного туза пик, двух двоек пик, трех пиковых троек и т. д. до девяти девяток пик, то есть всего в колоде 45 карт пиковой масти. Колоду перетасовывают, и кто-нибудь вытаскивает из нее одну карту. Вы должны отгадать ее, задавая вопросы, на которые можно ответить только словами «да» или «нет». Как сделать число этих вопросов минимальным?

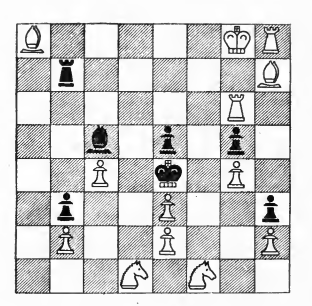


Рис. 35. Белые начинают и... не делают мата.

8. Белые начинают и... не делают мата в один ход. Необычную задачу, изображенную на рис. 35, предложил немецкий шахматный композитор Карл Фабель.

Нужно найти такой ход белых, чтобы черному королю этим ходом не был сразу же поставлен мат.

9. Найдите все типы шестигранников. Многогранником называется тело, ограниченное многоугольниками (они называются гранями многогранника). Простейшим многогранником является тетраэдр, поверхность которого состоит из четырех треугольников (рис. 36, *а*). Форма тетраэдра может быть самой разнообразной, но если тетраэдр подвергать любым топологическим преобразованиям, оставляющим инвариантными решетку, образованную его ребрами (то есть изменять структуру «каркаса»), то окажется, что существует только один основной тип тетраэдра. Иначе говоря, гранями тетраэдра могут быть только треугольники.

Существует два основных типа пятигранников (рис. 36, *б* и *в*). Представление об одном типе дает

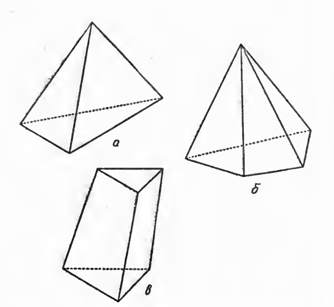


Рис. 36. Три типа многогранников.

пирамида Хеопса, четыре боковые грани которой имеют форму треугольников, а основание — форму четырехугольника. Пятигранник второго типа получится, если срезать одну из вершин тетраэдра. Поверхность такого пятиугольника образована двумя треугольниками и тремя четырехугольниками.

А сколько существует различных типов выпуклых шестигранников? (Многогранник называется выпуклым, если его можно положить на стол любой гранью; предполагается, что размеры стола намного больше размеров многогранника.) Самым известным примером выпуклого многогранника является, конечно, куб.

Если в поисках выпуклых шестигранников вы будете срезать вершины у простейших геометрических тел, вам придется внимательно следить за тем, чтобы среди полученных шестигранников не было повторяющихся. Например, если срезать вершину у пирамиды Хеопса, то полученный многогранник будет топологически эквивалентен кубу. Следует также помнить, что грани моделей должны быть плоскими.

ОТВЕТЫ

1. Задача о пятаках и полтинниках решается в четыре хода (монеты на верхнем рисунке считаются перенумерованными слева направо):

1) переложить монеты 3 и 4 направо от монеты 5, оставив между 3 и 4 промежуток шириной в две монеты;

2) переложить монеты 1 и 2 направо от 3 и 4 так, чтобы монеты 1 и 4 соприкасались;

3) ввести монеты 4 и 1 в промежуток между монетами 5 и 3.

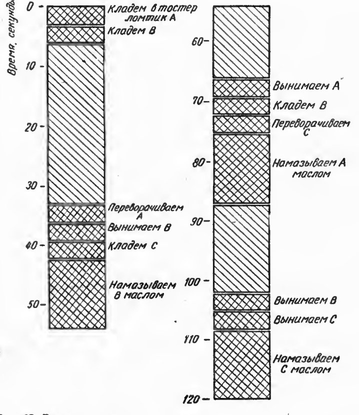


Рис. 37. Решение задачи с тостером.

4) ввести монеты 5 и 4 в промежуток между монетами 3 и 2.

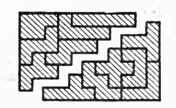
2. Имея тостер такого типа, о котором говорилось в условии задачи, можно за 2 минуты поджарить и намазать маслом три ломтика хлеба (*A*, *B*, *C*). Последовательность действий показана на рис. 37.

После того как это решение появилось в журнале, я с удивлением узнал от читателей, что время поджаривания трех кусочков хлеба можно сократить до 111 секунд. Оказалось, что я упустил одну возможность: недожаренный кусочек хлеба вынимается из тостера, а через некоторое время кладется обратно для поджаривания.

Ниже приводится одно из таких решений.

Секунды	Операция
1—3	Кладем в тостер ломтик *A*
3—6	Кладем *B*
6—18	В течение 15 *сек A* жарится с одной стороны
18—21	Вынимаем *A*
21—23	Кладем *C*
23—36	*B* поджаривается с одной стороны
36—39	Вынимаем *B*
39—42	Кладем *A*, перевернутый другой стороной
42—54	Мажем *B* маслом
54—57	Вынимаем *C*
57—60	Кладем *B*
60—72	Мажем *C* маслом
72—75	Вынимаем *A*
75—78	Кладем *C*
78—90	Мажем *A* маслом
90—93	Вынимаем *B*
93—96	Кладем *A*, перевернутый недожаренной стороной
96—108	*A* дожаривается до конца
108—111	Вынимаем *C*

Теперь все ломтики поджарены и намазаны маслом, но ломтик *A* остался в тостере. Даже если считать, что для полного окончания всех операций *A* должен быть вынут из тостера, все равно общее время составит только 114 секунд.



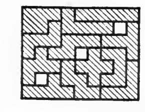
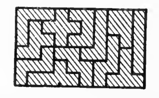


Рис. 38. Как превратить составленный из пентамино прямоугольник 6×10 в прямоугольник 7×9 с тремя отверстиями.



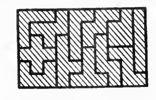


Рис. 39. Все элементы пентамино в этих прямоугольниках 6×10 касаются границ.

Автор этого решения замечает, что, пока *A* дожаривается, можно с пользой провести время, съев уже готовый ломтик *B*.

3. На рис. 38 показано, как надо разрезать на две части составленный из двенадцати элементов пентамино прямоугольник 6 × 10, чтобы из этих частей можно было сложить прямоугольник 7 × 9, имеющий три квадратных отверстия. На рис. 39 изображены два прямоугольника, сложенные из элементов пентамино, каждый из которых имеет общий отрезок с какой-нибудь стороной прямоугольника. Никакие другие способы складывания мне не известны. Правый прямоугольник замечателен тем, что его можно разрезать на две равные части (вспомните, как мы разрезали прямоугольник в предыдущей задаче о пентамино).

4. Человек поднимается на высокую гору и, пробыв несколько дней на вершине, спускается вниз. Найдется ли такая точка на тропе, которую оба раза он проходит в одно и то же время суток? Мое внимание на эту задачу обратил психолог из Орегонского университета Р. Хайман, который в свою очередь нашел ее в

монографии, озаглавленной «О решении задач» и принадлежащей перу немецкого психолога Дункера. Дункер пишет, что сам он не смог решить задачу, и с удовлетворением отмечает, что никто из тех, кому он ее предлагал, тоже не добился успеха. Далее Дункер говорит о том, что существует много подходов к решению задачи, но, по его мнению, «самым очевидным является следующее объяснение. Пусть в один и тот же день по тропе идут два человека: один из них поднимается вверх, а второй спускается вниз. Они обязательно должны встретиться. Отсюда, как вы сами понимаете, следует, что... при таком подходе неясный вначале смысл задачи вдруг сразу становится совершенно очевидным».

5. **А.** Какое число соответствует буквосочетанию OODDF, если оно представляет собой квадратный корень из числа, которое в тех же обозначениях записывается словом WONDERFUL? Начнем с буквы O. Во-первых O не может быть цифрой, большей чем 2; в противном случае число $(OODDF)^2$ было бы десятизначным, в то время как число букв в слове WONDERFUL равно девяти. Единицей буква O также не может быть, потому что единица не может стоять на втором месте в записи квадрата числа, начинающегося с двух единиц (11). Из всех этих рассуждений следует, что букве O соответствует цифра 2.

Число, записанное словом WONDERFUL, заключено между $(22\,000)^2$ и $(23\,000)^2$. Квадрат числа 22 равен 484, а квадрат числа 23 равен 529. Зная, что буква O соответствует цифре 2, можно сразу сказать, что $WO = 52$.

Какими должны быть еще не известные цифры в числе 22DDF, для того чтобы квадрат его был равен 52NDERFUL? Квадрат числа 229 равен 52 441; квадрат числа 228 равен 51 984. Следовательно, OODD равно либо 2299, либо 2288.

Воспользуемся теперь одним хитрым приемом: введем понятие цифрового корня. Сумма девяти цифр числа WONDERFUL (среди которых, как нам известно, нет нуля) равна 45; в свою очередь сумма цифр числа 45 равна 9 — его цифровому корню. Цифровой корень числа, получающегося при извлечении квадратного корня из числа WONDERFUL, при возведении в квадрат дол-

жеи давать иекоторое число с цифровым корнем, равным 9. Этому требоваиию удовлетворяют всего три цифровых корня: 3, 6, 9; один из них и должеи быть цифровым корием числа OODDF.

Буква F ие может обозначать 1, 5 или 6, потому что квадраты этих цифр равиы соответствеино 1, 25, 36 и слово WONDERFUL заканчивалось бы буквой F, а ие L. Из всех чисел, заключенных между 2299F и 2288F, лишь три числа — 22 998, 22 884 и 22 887 — имеют иазваиные числовые корни, удовлетворяющие сформулироваииому выше условию.

Возведя в квадрат каждое из трех чисел-кандидатов, мы без труда убедимся в том, что результат лишь в одиом случае состоит из разиых цифр и, следовательно, соответствует слову WONDERFUL.

Б. Решение этой задачи иамиого упрощается, если заметить следующее.

Расположив девять цифр в квадрате из девяти клеток так, чтобы их можно было обойти ходом ладьи, мы иепремеиио должиы поставить нечетные цифры в центральной и четырех угловых клетках.

Представим себе, что наш квадрат вырезан из шахматиой доски, причем так, что цеитральиая клетка — чериая. Ясио, что черных клеток на одиу больше, чем белых, и поэтому обход цифр иачииается и кончается иа черных клетках, то есть все белые клетки заняты четиыми цифрами.

Четыре четные цифры можио разместить в белых квадратиках двадцатью четырьмя различными способами; восемь из иих можио сразу же отбросить, потому что они приводят к квадратам, в которых цифры 2 и 4 стоят ие в соседиих клетках по диагонали, а через клетку иа одной вертикали или горизоитали. Обойти в таких квадратах ладьей все цифры по порядку иевозможно.

Остается проверить еще 16 вариантов. Сделать это можно довольио быстро, если заметить, что в искомом квадрате сумма двух верхиих цифр в правом столбце должна быть больше 10, а сумма двух верхиих цифр в левом столбце — меиьше 10. Второе утверждение справедливо потому, что одна из двух верхних цифр в среднем столбце четиая, а другая иечетная, в то время как их сумма четна. Так может происходить лишь в том

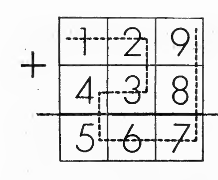


Рис. 40. **Универсальный квадрат, обладающий двумя требуемыми свойствами.**

случае, если при суммироваиии двух верхиих цнфр нз правого столбца в срединй переносится едииица, то есть если две верхиие цифры правого столбца в сумме превышают 10. Отброснв все квадраты, ие удовлетворяющне этому условию, мы получим один-едииственный квадрат, у которого чнсло, стоящее в иижием ряду, равио сумме двух верхинх чисел. Этот квадрат и способ обхода ладьей всех цнфр показаны иа рис. 40.

После того как это решенне появилось иа страннцах журнала *Scientific American*, я получнл два письма, в которых предлагался способ, позволяющнй получить ответ намного быстрее. В иашем квадрате существует лншь трн прннцнпнально разлнчных обхода ладьей всех цнфр (пути обхода, переходящне друг в друга прн поворотах н отраженнях, счнтаются одииаковыми): первый путь показан на рис. 40, второй нмеет внд спиралн, которая берет начало в угловой клетке, последовательно проходнт параллельно трем стороиам н кончается в центральном квадратнке, н, наконец, третий путь иапоминает своей формой букву *S* (его первая н последняя клеткн находятся на концах одной н той же днагоналн). Каждый путь можно проходнть в двух разиых направлениях (от «начала» к «концу» и наоборот), поэтому всего мы получаем шесть разлнчных варнантов обхода. Теперь надо посмотреть, во что переходнт каждый нз этих шестн квадратов при повороте или отраженнн в зеркале. Перебрав все варианты, мы быстро найдем нскомый квадрат, который к тому же оказывается едннственным.

Заметнм, что еслн отразнть решенне в зеркале, то в новом квадрате цифры тоже будут располагаться по ходу ладьн в порядке возрастания илн убывання; вычнтая нз верхнего ряда среднні, мы получим число, стоящее в ннжием ряду.

Существуют еще три решения, в которых цифры от 1 до 9 последовательно связаны не ходом ладьи, а ходом ферзя. Имеются основания полагать, что других решений подобного рода не существует.

6. Кант установил точное время следующим образом. Уходя из дому, он завел стенные часы, поэтому, вернувшись и взглянув на циферблат, он сразу понял, сколько времени он отсутствовал. Кант точно знал, сколько часов он провел у Шмидта, потому что придя в гости и перед уходом домой смотрел на часы в прихожей. Кант вычел это время из всего времени, в течение которого его не было дома, и таким образом определил, сколько времени заняла прогулка туда и обратно. Поскольку оба раза он шел одним и тем же путем с одинаковой скоростью, то дорога в один конец заняла у него ровно половину вычисленного времени, и это позволило Канту получить точное время возвращения домой.

Один из читателей предложил другое решение. Он написал, что Шмидт был не только другом Канта, но и его часовщиком, и Шмидту ничего не стоило за приятной беседой починить часы своему приятелю.

7. Прежде всего выпишем по порядку вероятности появления карт всех девяти значений от туза до девятки: $^{1}/_{45}$, $^{2}/_{45}$, $^{3}/_{45}$... Сложив две наименьшие вероятности, мы получим вероятность нового события $^{1}/_{45} + ^{2}/_{45} = ^{3}/_{45}$; это будет вероятность того, что выбранная карта явится либо тузом, либо двойкой пик. После этого объединения туза и двоек остается восемь элементарных событий: вытащенная карта может быть тузом или двойкой пик (одно событие), а также тройкой, четверкой и т. д. до девяти. Объединим еще раз два события с наименьшими вероятностями: вероятность того, что вытащенная карта будет тузом или двойкой, равна $^{3}/_{45}$ и с такой же вероятностью вытащенная карта будет тройкой. Новое элементарное событие, состоящее в том, что извлеченная из колоды карта будет тузом, двойкой или тройкой, имеет вероятность $^{6}/_{45}$. Эта вероятность выше, чем вероятность появления отдельной четверки или пятерки, поэтому две последние вероятности будут наименьшими, и, сложив их, мы получим вероятность нового события, состоящего в появлении либо четверки, либо пятерки

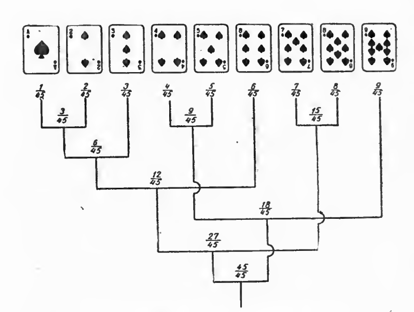


Рис. 41. Способ, позволяющий свести до минимума число вопросов при отгадывании одного из предметов, вероятности появления которых заданы. Отвечать на вопросы можно только словами «да» или «нет».

(она равна $^9/_{45}$). Так надо складывать все вероятности до тех пор, пока не останется всего один элемент с вероятностью $^{45}/_{45}$, или 1. Из рис. 41 ясно, как комбинируются элементы друг с другом. Для минимизации числа вопросов надо представить себе, что карты расположены по схеме рис. 41, и задавать вопросы в последовательности, обратной порядку составления схемы. Это и будет искомая стратегия. Поясним на примере, как пользоваться схемой. Первый вопрос должен быть таким: содержится ли задуманная карта среди четверок, пятерок и девяток? Если ответ будет отрицательным, задавайте следующий вопрос: находится ли задуманная карта среди семерок и восьмерок? И так далее, пока не отгадаете карту.

Заметим, что если задуманы туз или двойка, то для отгадывания понадобится пять вопросов. Избрав «дихотомическую» стратегию, то есть деля каждым вопросом

все элементы на два примерно равных по мощности множества, вы уменьшите необходимое число вопросов до четырех, а некоторые карты можно будет отгадать, задав всего три вопроса. Однако, когда карт очень много, описанная схема позволяет задать меньше вопросов, чем если вы просто делите все множество элементов пополам, причем это число вопросов будет одновременно и наименьшим возможным. В случае девяти карт минимальное число вопросов равно трем.

Этот минимум вычисляется следующим образом. Если задуман туз, то для отгадывания придется задать пять вопросов. Столько же вопросов понадобится, если задумана двойка, но двоек две, и поэтому всего будет десять вопросов. Для отгадывания тройки необходимо задать четыре вопроса, а поскольку троек три, то нужно двенадцать вопросов $(3 \times 4 = 12)$. Всего же для 45 карт получается 135 вопросов, то есть в среднем по три вопроса на карту.

Описанную стратегию впервые открыл Д. Хуффман. Популярное изложение этой задачи можно найти в книге Дж. Пирса *.

8. У белых есть единственный способ не объявить мат черному королю: перевести ладью с поля g6 на поле c6. Правда, этим ходом черному королю объявляется шах, но черные снимут угрозу, взяв ладьей (b2) белого слона (h7).

Опубликовав эту задачу в журнале *Scientific American*, мы начали получать десятки писем, авторы которых указывали на невозможность возникновения изображенной позиции, ибо два белых слона не могут занимать клетки одного и того же цвета. Напоминаю тем, кто придерживается того же мнения, что пешка, достигшая последнего ряда, может быть заменена любой фигурой, а не только ферзем. Отсутствие на доске двух белых пешек говорит о том, что одну из них заменили слоном.

Известно немало случаев, когда мастера заменяли пешку конем, но замена пешки слоном, по общему мнению, встречается нечасто. Однако вполне можно представить себе ситуации, когда такая замена весьма желательна, например для того, чтобы не сделать мат

* Дж. Пирс, Символы, сигналы и шумы, М., изд-во «Мир», 1967.

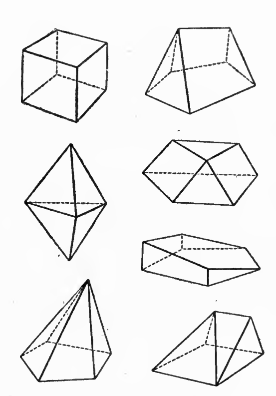


Рис. 42. Семь типов выпуклых шестигранников.

противнику. Может быть и так, что белые придумали какой-нибудь хитрый способ объявить мат ферзем или слоном. Ни той ни другой фигуры на доске нет, но одну из них можно поставить вместо пешки. Если белые обменяют пешку на ферзя, то противник немедленно возьмет его черной ладьей, которая в свою очередь будет взята белым конем, и, таким образом, белые останутся ни с чем. Но если на доску вернется белый слон, то весьма вероятно, что противнику не захочется жертвовать ради слона ладьей, и слон сможет вступить в игру.

9. На рис. 42 изображены семь видов выпуклых шестигранников, ребра которых образуют топологически разные каркасы. Я не знаю простого доказательства того, что других моделей не существует.

ГЛАВА 7

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Не слишком хорошо известная, но временами крайне полезная ветвь математики — исчисление конечных разностей — стоит где-то на полдороге между элементарной алгеброй и математическим анализом.

Известный математик У. У. Сойер свой курс лекций об исчислении конечных разностей, который он читал в Веслианском университете (штат Коннектикут), обычно начинал... отгадыванием мыслей.

Вопреки традиции попросите кого-нибудь задумать не число, а формулу. Фокус показывать легче, если ваш партнер задумает какой-нибудь квадратный трехчлен (то есть выражение, не содержащее степеней x выше второй — x^2). Предположим, задумано выражение $5x^2 + 3x - 7$. Повернувшись к зрителям спиной, попросите их подставить вместо x числа 0, 1, 2 и сообщить вам, чему при этих значениях x равно все выражение. Допустим, что зрители называют три числа: —7, 1, 19. Вы быстро производите на бумаге какие-то выкладки (попрактиковавшись, вы научитесь все необходимые вычисления делать в уме) и называете задуманный квадратный трехчлен!

Разгадка очень проста. Запишите три названных числа в одну строку. На следующей строке напишите разности между соседними числами (вычитать каждый раз надо из правого числа левое). На третьей строке напишите разности между числами второй строки. На вашем листке окажется следующая запись:

$$\begin{array}{ccccc} -7 & & 1 & & 19 \\ & 8 & & 18 & \\ & & 10 & & \end{array}$$

В задуманном выражении коэффициент при x^2 всегда равен половине нижнего числа. Коэффициент при x

получается, если вычесть из первого числа средней строки половину нижнего числа, а свободный член просто равен первому числу в верхней строке.

Проделанные сейчас вами действия в некотором смысле аналогичны интегрированию. Если y равен значению задуманного выражения, то это выражение дает нам y как функцию от x. Пусть, например, x принимает значения, образующие арифметическую прогрессию (0, 1, 2, ...), тогда y будет принимать ряд значений (—7, 1, 19, ...). Такие ряды и являются предметом изучения в исчислении конечных разностей. В фокусе, разобранном в начале главы, вы с помощью очень простого метода восстановили по трем членам производящую (квадратичную) функцию ряда.

Исчисление конечных разностей появилось в XVIII веке (между 1715 и 1717 годами), когда английский математик Брук Тейлор (в честь которого в математическом анализе назван «ряд Тейлора») написал трактат под названием «Метод конечных приращений». Первая серьезная работа на эту тему, написанная на английском языке, была опубликована в 1860 году и принадлежала перу Джона Буля, известного своими исследованиями по символической логике. В XIX веке учебники по алгебре содержали лишь самые поверхностные сведения об исчислении конечных разностей, а потом исчисление конечных разностей и вовсе вышло из моды; его методами продолжали пользоваться лишь страховые общества для проверки своих таблиц да изредка ученые — при численной интерполяции или выяснении вида функции по нескольким численным значениям. Сейчас исчисление конечных разностей опять вошло в обиход и стало мощным методом статистики и социальных наук.

Те, кто интересуется занимательной математикой, найдут очень полезными многие элементарные методы исчисления конечных разностей. Посмотрим, например, как они используются в старой задаче о разрезании круглого пирога. На какое максимальное число кусков можно разделить круглый пирог, если сделать n разрезов, каждый из которых пересекает все остальные? Очевидно, что искомое число является функцией от n; если эта функция не слишком сложна, то ее можно найти эмпирическим путем с помощью разностного метода.

Если совсем не разрезать пирог, получится один кусок; два разреза дают три куска, три разреза — четыре куска и т. д. Методом проб и ошибок нетрудно вычислить несколько первых членов ряда: 1, 2, 4, 7, 11, ... (рис. 43). Вычислите разности этих чисел, затем разности разностей и т. д., располагая их по строкам, как в предыдущем примере. Каждое число в следующей строке должно быть равно разности двух соседних чисел предыдущей строки:

Число разрезов	0	1	2	3	4
Число кусков	1	2	4	7	11
Первые разности	1	2	3	4	
Вторые разности		1	1	1	

Если производящая функция исходного ряда линейна, то все первые разности равны между собой. Если она квадратична, то равны между собой вторые разности. Кубическое выражение (то есть выражение, содержащее степень x не выше третьей — x^3) будет иметь

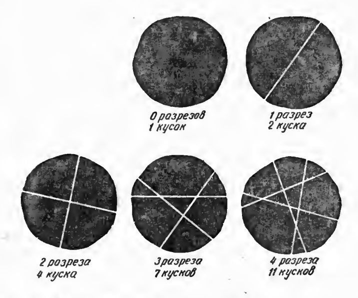


Рис. 43. Задача о разрезании круглого пирога.

одинаковые третьи разности и т. д. Иными словами, число строк, состоящих из разностей, должно быть равно порядку функции.

Если разности начинают совпадать только в десятой строке, то это свидетельствует о том, что в производящую функцию исходного ряда входит x^{10}.

В нашем примере схема содержит всего две строки, поэтому функция квадратична по x и мы можем ее найти с помощью того простого метода, который использовался в фокусе с «чтением мыслей».

Задача о разрезании пирога имеет двоякую интерпретацию. С одной стороны, ее можно рассматривать как абстрактную задачу чистой геометрии (пересечение идеального круга идеальными прямыми), с другой — ее же можно рассматривать с точки зрения прикладной геометрии (реальный пирог разрезать реальным ножом).

Физика дает нам много примеров и того, как одно и то же явление можно изучать и абстрактно, теоретически, и экспериментально. В физике же мы нередко видим, как сложные формулы возникают при обработке экспериментальных результатов разностными методами.

Рассмотрим знаменитую квадратичную формулу, связывающую номер атомной оболочки с максимальным числом электронов, которое может в ней находиться (то есть с числом заполнения). По мере удаления от ядра число электронов, необходимое для насыщения оболочки, растет и принимает следующие значения: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ... Строка первых разностей имеет вид 2, 6, 10, 14, 18, ..., строка вторых разностей 4, 4, 4, 4, ... Произведя над этими числами те же действия, что и в фокусе, мы получим простую формулу $2n^2$ для числа заполнения n-й оболочки.

Возникает вопрос: как надо поступить, если порядок функции выше квадратичного? В этом случае можно воспользоваться формулой, открытой Ньютоном и пригодной для любого числа в схеме.

В формуле Ньютона предполагается, что ряд начинается с того значения функции, которое она принимает при $n = 0$. Обозначим это число через a. Число, которым открывается строка первых разностей, обозначим буквой b; первое число строки вторых разностей обозначим буквой c и т. д. Тогда формула для n-го члена

исходного ряда будет иметь вид

$$a + bn + \frac{cn(n-1)}{2} + \frac{dn(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} + \\ + \frac{en(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots .$$

Формулу продолжают до тех пор, пока все дальнейшие члены не станут равными нулю. Например, применяя ее к задаче о разрезании пирога, нужно положить $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ (все остальные члены в формуле обращаются в нуль, потому что все строки, лежащие ниже второй, — они даже не выписаны — состоят из одних лишь нулей, то есть в этом случае коэффициенты d, e, f, ... равны нулю). В результате мы приходим к квадратичной функции $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

Означает ли это, что тем самым мы получаем формулу для определения максимального числа кусков, на которое можно разделить пирог, если провести n разрезов? К сожалению, самое большее, что можно ответить на этот вопрос: «По всей вероятности, да».

Вас, наверное, заинтересует причина такой неуверенности. Дело в том, что для любого конечного ряда чисел существует бесконечно много производящих функций. (Это утверждение эквивалентно другому, более понятному: через любое конечное число точек можно провести бесконечное множество кривых.) Рассмотрим, например, ряд 0, 1, 2, 3, ... Чему равен следующий член? Одним из правильных ответов будет — четырем. В самом деле, применив только что объясненный метод, мы обнаружим, что все первые разности равны 1 и по формуле Ньютона n-й член ряда просто равен n. Однако по другой формуле

$$n + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

получается ряд, у которого каждый из четырех первых членов тоже равен своему номеру n, а все последующие члены, начиная с пятого, отличны от n. Вычислив по второй формуле несколько первых членов, получим 0, 1, 2, 3, 5, 10, 21, ...

Ситуация с этими двумя рядами очень похожа на то, как открываются законы в науке. Пользуясь разностным методом, можно анализировать физические

явления и угадывать те законы, которым они подчиняются. Пусть, например, какой-нибудь физик впервые исследует законы падения тел. Он видит, что камень пролетает 16 футов за первую секунду, 64 фута — за вторую и т. д. Свои наблюдения он записывает в виде схемы

$$\begin{matrix} 0 & & 16 & & 64 & & 144 & & 256 \\ & 16 & & 48 & & 80 & & 112 & \\ & & 32 & & 32 & & 32 & & \end{matrix}$$

Конечно, реальные измерения неизбежно содержат ошибки, поэтому числа в нижней строке будут несколько отличаться от 32. Поскольку отличие это невелико, физик высказывает предположение, что вся следующая строка состоит из одних лишь нулей. Тогда по формуле Ньютона получается, что за n секунд камень пролетит расстояние, равное $16n^2$ футов. Однако формула $16n^2$ не говорит ничего определенного о самом законе падения; нам пока удалось получить простейшую функцию, с помощью которой можно описать конечный ряд проведенных наблюдений. Иными словами, мы провели кривую низшего порядка через конечное число экспериментальных точек. Увеличивая число наблюдений, мы, конечно, будем получать все более надежные подтверждения открытого закона, но никогда нельзя быть уверенным в том, что новые наблюдения не внесут в закон каких-нибудь существенных поправок.

Возвращаясь к задаче о разрезании пирога, мне хочется подчеркнуть, что она очень похожа на разобранный выше пример, хотя в ней вместо реальных объектов фигурируют идеальные математические фигуры. Из всех известных нам сведений можно сделать тот вывод, что, разрезав пирог пятый раз, мы совсем не обязательно получим 16 кусков, как предсказывает формула. Одна маленькая неудача — расхождение с заранее предсказанным результатом — моментально обнаруживает неправильность формулы, в то время как сколь угодно большое (хотя и конечное) число успешных испытаний никогда не сможет окончательно подтвердить ее справедливость.

Д. Пойа писал: «Природа может ответить и «да» и «нет», но один ответ будет еле слышен, а второй прогрохочет раскатами грома. Ее «да» — всего лишь пред-

положеиие, зато «иет» всегда определенно». Пойа имеет в виду вовсе ие абстрактиые математические объекты, а окружающий нас реальный мир, но его точка зрения удивительно верно описывает процесс восстаиовления вида функции с помощью метода конечиых разиостей. В математике многие гипотезы основаиы иа методах, сходных с индуктивным методом в естественных науках; Пойа написал прекрасную книгу, посвященную тому, как рождаются математические гипотезы.

Перебрав на бумаге несколько возможных способов разрезания пирога, мы увидим, что шестнадцать — все-таки максимальное число кусков, которое получается с помощью пяти разрезов. В даниом случае формула дает верный результат, и это увеличивает вероятность того, что она правильна; однако до появления строгого доказательства (для задачи о разрезании пирога оно весьма несложно) формула останется не более чем удачной догадкой. Вопрос о том, почему и в естественных науках, и в математике самая простая формула оказывается к тому же самой лучшей, до сих пор усиленно обсуждается в философии естествознания. Никто, правда, точно не знает, что подразумевается под словами «самая простая формула».

Известно еще несколько задач, близких по духу задаче о разрезании пирога, которые также решаются методом конечиых разностей. Сиачала высказывается наиболее правдоподобная догадка о виде формулы, а затем с помощью дедуктивного метода ее пытаются доказать. На какое максимальное число частей можно разделить плоский полумесяц, сделав одновременно n разрезов? Сколько ломтиков получится из одного цилиндрического кекса, если его одновремеино рассечь n плоскостями? На сколько частей делят плоскость пересекающиеся окружности с равными радиусами? С разными радиусами? А что будет, если пересекаются эллипсы разных размеров? На сколько областей делят пространство пересекающиеся сферы?

Комбинаторным и перестановочным задачам занимательной математики иередко отвечают формулы иизких порядков, которые легко предсказываются методом конечных разностей и лишь потом (и то ие во всех случаях) доказываются. Представьте себе комплект, содержащий бесконечное множество зубочисток n разных

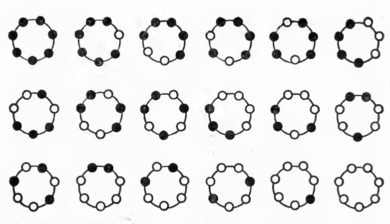


Рис. 44. Как наиизать семь бусии двух различных цветов 18 разиыми способами, чтобы получить 18 различных ожерелий.

цветов, из которых вы стронте плоскне треугольники. Треугольникн, переходящне друг в друга прн отраженнях, счнтаются разными, а треугольннки, переходящне друг в друга прн поворотах, — одинаковымн. Сколько разных треугольников можно постронть нз зубочнсток, если для трех сторон каждого треугольника нужно взять три зубочнстки? Предположнм, что вы стронте не треугольннкн, а квадраты. Сколько тогда получнтся разных квадратов? Сколько получнтся разных тетраэдров, еслн все гранн каждого тетраэдра выкрашены в разные цвета, а всего имеется n красок? (Два тетраэдра счнтаются одннаковымн, еслн нх разверткн можио наложнть друг на друга граиямн одного цвета.) Сколько прн том же условнн получнтся разных кубов?

Если пронзводящая функцня ряда ие является полиномом, то приходнтся обращаться к помощн другнх разностных методов. Напрнмер, функция 2^n дает для разных значенний ряд 1, 2, 4, 8, 16, ... Строка первых разностей будет в точностн такой же, как и исходиый ряд, поэтому нзложенный ранее метод ни к чему не прнведет. Иногда простая с внду задача порождает ряд, для которого ннкак не удается подобрать пронзводящую фуикцню. Вот однн досадный прнмер из сборннков головоломок Геири Дьюдени. Круглое ожерелье состонт из n бусниок. Каждая бусиика — либо чериого, либо

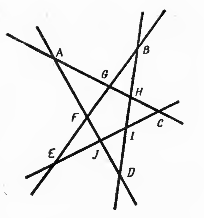
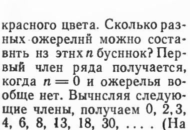


Рис. 45. Как провести пять прямых, чтобы построить десять треугольников.



красного цвета. Сколько разных ожерелнй можно составнть нз этнх n бусннок? Первый член ряда получается, когда $n = 0$ и ожерелья вообще нет. Вычнсляя следующие члены, получаем 0, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, ... (На рнс. 44 показаны ожерелья для $n = 7$.) Я подозреваю, что задача нуждается в двух формулах: одиа формула для четных n, вторая — для нечетных, но я инчего не могу сказать о том, можио лн получить эти формулы методом коиечных разностей. Дьюдени пишет, что «общее решение очень сложно, еслн оно вообще существует». Рассмотрениая задача экввалентна следующему вопросу из теорнн ннформацин: сколько существует разных сочетаиий («слов») нз заданного числа цифр двончной системы (сочетання, в которых цнфры, еслн нх расположить по кругу и читать слева направо нли справа налево, приводят к одному н тому же слову, разлнчнымн не счнтаются).

Чнтателн могут проверить свою сообразнтельность на более простой задаче. Какое макснмальное число прямоугольинков можно построить, проведя n прямых? На рис. 45 показано, как пять лиинй образуют десять треугольнников. Сколько треугольнников получится нз шестн лнннй и какой вид нмеет общая формула?

Сначала эту формулу можно найти методом конечных разностей, а после более подробного нзучення полученного выраження его справедлнвость тоже легко доказывается.

ОТВЕТЫ

Применяя формулу Ньютоиа для обработки экспериментальных даиных, ннога можно столкнуться с тем,

что при $n = 0$ она утрачивает смысл. Например, в книге «Математические головоломки и развлечения» мы уже приводили формулу для максимального числа кусков, на которые можно разделить бублик с помощью n одновременных плоских разрезов. Формула оказывается кубической:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}$$

и получается из экспериментальных результатов по формуле Ньютона, однако для случая $n = 0$ она неприменима. Если бублик вообще не разрезан, то перед вами все-таки лежит один кусок, в то время как формула утверждает, что не должно быть ни одного куска. Если вы хотите пользоваться формулой при всех n, «кусок» придется определить как часть бублика, которая получается после его разрезания. В тех случаях, когда формула неприменима при $n = 0$, следует произвести обратную экстраполяцию и задать в нуле такое значение функции, при котором первый член последней строки в таблице разностей имеет нужное значение.

Докажем уже приводившуюся ранее формулу для максимального числа кусков, на которое можно разделить круглый пирог с помощью n прямых разрезов. Прежде всего заметим, что n-я линия пересекает $(n-1)$ линий, которыми плоскость делится на n областей. Когда n-я линия проходит через эти n областей, она делит каждую из них пополам и областей становится на n больше. Вначале есть один кусок, который после первого разрезания превращается в 2; второй разрез увеличивает это число еще на 2 куска; после третьего разреза число кусков увеличивается уже на три и т. д. до тех пор, пока после n-го разреза число кусков не увеличится на n. Складывая все эти числа, получаем $1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Начиная со второго члена это просто арифметическая прогрессия $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$, сумма которой равна $^1/_2 n\ (n-1)$. Прибавив к этому выражению единицу, мы получим окончательную формулу.

Приведенное ниже решение задачи об ожерельях принадлежит уже упоминавшемуся Соломону В. Голомбу. Напомним условие задачи: определить, сколько разных ожерелий можно сделать из n бусинок, если каж-

дая бусинка выкрашена в один из двух цветов и ожерелья, переходящие друг в друга при вращении или отражении, не считаются различными. Взглянув на формулу, вы убедитесь в том, что по сложности она далеко выходит за рамки простого метода конечных разностей.

Обозначим делители числа n (включая сюда 1 и n) буквами d_1, d_2, d_3, ... Найдем для каждого делителя так называемую фи-функцию Эйлера, обозначаемую $\varphi(d)$. Эта функция равна числу целых чисел, не превышающих d и не имеющих с d общего делителя. Единица считается одним из таких чисел, а само d — нет. Например, φ (8) равно 4, потому что существует четыре целых числа, не превышающих 8 и не имеющих с 8 ни одного общего делителя. По определению $\varphi(1) = 1$. Значения φ-функции Эйлера для чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7 равны соответственно 1, 2, 2, 4, 2, 6. Если обозначить число различных цветов, в которые может быть окрашена бусинка, через a, то мы получим формулу

$$\frac{1}{2n}[\varphi(d_1)\cdot a^{n/d_1} + \varphi(d_2)\cdot a^{n/d_2} + \ \dots \ + n\cdot a^{(n+1)/2}],$$

по которой вычисляется, сколько разных ожерелий можно составить из n бусинок, когда n нечетно. Формула для четного n будет выглядеть так:

$$\frac{1}{2n}\left[\varphi(d_1)\cdot a^{n/d_1} + \varphi(d_2)\cdot a^{n/d_2} + \ \dots \ + \frac{n}{2}(1+a)\cdot a^{n/2}\right].$$

Точка обозначает знак умножения.

Приведенные формулы являются решением более общей задачи, чем та, которую я предлагал в тексте, потому что они справедливы для любого числа цветов бусинок.

В книге Дьюдени «Занимательные задачи и головоломки» под номером 275 приводится задача о бусинках. Эту же задачу упоминает Риордан *. Он показывает, как надо ее решать, но не приводит окончательных формул **. Впоследствии эта задача была подробно разобрана Э. Гильбертом и Дж. Риорданом, которые

* Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963, стр. 192—193.

** См. также *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 5, № 4, 1957, pp. 232—234.

нашли ей ряд забавных применений в теории музыки и в теории переключателей *.

Гильберт и Риордан вычислили, сколько разных ожерелий получается из бусинок двух цветов, если число бусинок колеблется от одной до двадцати. Результаты их выкладок приведены в следующей таблице:

Число бусинок	Число ожерелий
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	13
7	18
8	30
9	46
10	78
11	126
12	224
13	380
14	687
15	1 224
16	2 250
17	4 112
18	7 685
19	14 310
20	27 012

Между прочим, существование формул для задачи о бусинках вовсе не означает, что Дьюдени ошибался, считая, что решения не существует. Он просто имел в виду, что невозможно найти такой полином от n, который давал бы необходимое число сразу, без вычисления нескольких первых значений. Дело в том, что в формулу входит эйлерова функция φ, и поэтому число ожерелий приходится вычислять рекуррентным способом. Дьюдени не очень точно формулирует свою мысль, но рекуррентные формулы он не считает «решением». Метод конечных разностей в любом случае неприменим к рассмотренной задаче, и для нее известны лишь рекуррентные соотношения.

* *Illinois Journal of Mathematics*, **5**, № 4, 1961, pp. 657—665.

Многие читатели обнаружили, что, когда число бусинок равно какому-нибудь простому числу (отличному от 2), формула для количества разных ожерелий сильно упрощается:

$$\frac{2^{n-1}-1}{2} + 2^{\frac{n-1}{2}} + 1.$$

Интересное письмо прислал нам Дж. Гаммер, директор школы из Филадельфии.

Уважаемая редакция!

Я с большим интересом прочитал статью об исчислении конечных разностей, и мне пришло в голову, что еще задолго до знакомства с исчислением конечных разностей я самостоятельно открыл одно из самых интересных приложений формулы Ньютона. Я просто применил ее к степенному ряду. Как-то, возясь с цифрами, я заметил, что, если написать квадратичный ряд 4, 9, 16, 25, 36, 49 и вычесть числа друг из друга по вашему описанию, а в полученном ряду произвести такое же вычитание, мы придем к некоторой разности, которая уже не будет меняться, и члены последнего ряда будут одинаковыми.

Потом, проделав то же самое с кубическими рядами и с рядами, состоящими из четвертых степеней чисел натурального ряда, я нашел общую закономерность, заключающуюся в том, что если n равно степени ряда, то, произведя n вычитаний, вы придете к конечной разности, равной n! Я рассказал об этом отцу, который в течение многих лет работал директором обсерватории и преподавал математику в Хаверфордском колледже. Он ответил: «Знаешь, Джон, а ведь ты открыл исчисление конечных разностей».

Сколько разных треугольников может образоваться при пересечении n прямых? Для одного треугольника потребуются по крайней мере три прямые, из четырех прямых можно построить четыре треугольника, из пяти — десять. Остановившись на пяти прямых, можно больше не считать треугольники, а, воспользовавшись методом конечных разностей, составить следующую таблицу:

Число прямых	0		1		2		3		4		5
Число треугольников	0		0		0		1		4		10
Первые разности		0		0		1		3		6	
Вторые разности			0		1		2		3		
Третьи разности				1		1		1			

Наличие трех рядов говорит о том, что производящая функция кубична по n; по формуле Ньютона для

нее получается выражение $^1/_6 n(n-1)(n-2)$, которому соответствует ряд 0, 0, 0, 1, 4, 10, ... , приведенный в таблице. Формула $^1/_6 n(n-1)(n-2)$ с большой вероятностью дает максимальное число треугольников, которые можно построить пересечением n прямых. Но пока это лишь догадка, основанная на несложном подсчете; проверить ее справедливость можно следующими рассуждениями.

Прямые надо проводить так, чтобы никакие две из них не были параллельны, а в одной точке пересекалось бы не больше двух прямых. Тогда все прямые наверняка пересекаются друг с другом, а каждые три образуют треугольник. Одни и те же три прямые не могут образовывать более одного треугольника, поэтому, выполнив поставленные условия, мы построим максимально возможное число треугольников. Очевидно, что рассмотренная задача эквивалентна вопросу: сколькими (разными) способами можно выбрать три линии из набора, содержащего n линий? Ответ, который дает элементарная комбинаторика, совпадает с формулой, полученной эмпирическим путем.

Ниже даны ответы на все остальные вопросы, поставленные в этой главе.

1. Число частей, на которые можно разделить плоский полумесяц, сделав n разрезов:

$$\frac{n^2+3n}{2}+1.$$

2. Число ломтиков, на которые можно разделить цилиндрический кекс с помощью n плоских разрезов:

$$\frac{n^3+5n}{6}+1.$$

3. Число областей, на которые делят плоскость n пересекающихся окружностей:

$$n^2-n+2.$$

4. Число областей, на которые делят плоскость n пересекающихся эллипсов:

$$2n^2-2n+2.$$

5. Число областей, на которые делят пространство n пересекающихся сфер:

$$\frac{n(n^2-3n+8)}{3}.$$

6. Число треугольников, которые можно сложить из зубочисток n цветов:

$$\frac{n^3+2n}{3}.$$

7. Число квадратов, которые можно сложить из зубочисток n цветов:

$$\frac{n^4+n^2+2n}{4}.$$

8. Число разных четырехцветных тетраэдров при общем числе красок, равном n:

$$\frac{n^4+11n^2}{12}.$$

9. Число разных шестицветных кубов (общее число красок равно n):

$$\frac{25n^4-120n^3+209n^2-108n}{6}.$$

ГЛАВА 8

КАЗНЬ ВРАСПЛОХ И СВЯЗАННЫЙ С НЕЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС

«Появился великолепный новый парадокс»,— так начиналась мало понятная для непосвященного статья Майкла Скривена в июльском номере британского философского журнала *Mind* за 1951 год. Скривен занимал кафедру философии науки в Университете штата Индиана, и в подобных вопросах с его мнением нельзя было не считаться. Парадокс действительно оказался великолепным. Достаточное тому подтверждение — более

двадцати статей о нем в различных научных журналах. Авторы, среди которых были известные философы, сильно разошлись во мнениях относительно того, что следует считать решением парадокса. За многие годы ни к какому соглашению прийти не удалось, так что парадокс и поныне является предметом горячих споров.

Неизвестно, кому первому пришла в голову идея парадокса. Согласно У. В. Куайну, логику из Гарвардского университета, автору одной из упоминавшихся выше статей, впервые об этом парадоксе заговорили в начале сороковых годов нашего века, нередко формулируя его в виде головоломки о человеке, приговоренном к смертной казни через повешение.

Осужденного бросили в тюрьму в субботу.

— Тебя повесят в полдень, — сказал ему судья, — в один из семи дней на следующей неделе. Но в какой именно день это должно произойти, ты узнаешь лишь утром в день казни.

Судья славился тем, что всегда держал свое слово. Осужденный вернулся в камеру в сопровождении адвоката. Как только их оставили вдвоем, защитник удовлетворенно ухмыльнулся.

— Неужели не понятно? — воскликнул он. — Ведь приговор судьи нельзя привести в исполнение!

— Как? Ничего не понимаю, — пробормотал узник.

— Сейчас объясню. Очевидно, что в следующую субботу тебя не могут повесить: суббота — последний день недели, и в пятницу днем ты бы уже знал наверняка, что тебя повесят в субботу. Таким образом, о дне казни тебе бы стало известно до официального уведомления в субботу утром, следовательно, приказ судьи был бы нарушен.

— Верно, — согласился заключенный.

— Итак, суббота, безусловно, отпадает, — продолжал адвокат, — поэтому пятница остается последним днем, когда тебя могут повесить. Однако и в пятницу повесить тебя нельзя, ибо после четверга осталось бы всего два дня — пятница и суббота. Поскольку суббота не может быть днем казни, повесить тебя должны лишь в пятницу. Но раз тебе об этом станет известно еще в четверг, то приказ судьи опять будет нарушен. Следовательно, пятница тоже отпадает. Итак, последний день, когда тебя еще могли бы казнить, это четверг. Однако четверг тоже

Рис. 46. «... Точно так же я могу исключить среду, вторник и понедельник. Остается только завтрашний день. Но завтра меня наверняка не повесят, потому что я знаю об этом уже сегодня».

не годится, потому что, оставшись в среду живым, ты сразу поймешь, что казнь должна состояться в четверг.

— Все понятно! — воскликнул заключенный, воспрянув духом. — Точно так же я могу исключить среду, вторник и понедельник. Остается только завтрашний день. Но завтра меня наверняка не повесят, потому что я знаю об этом уже сегодня!

Короче говоря, приговор внутренне противоречив. С одной стороны, в двух утверждениях, из которых он состоит, нет ничего логически противоречивого, а с другой — привести его в исполнение, оказывается, невозможно. Именно так представлял себе парадокс Д. Дж. О'Коннор, философ из Эксетерского университета, первым опубликовавший статью об этом парадоксе (*Mind, July* 1948). В формулировке О'Коннора фигурировал офицер, объявляющий своим подчиненным о том, что на следующей неделе должна состояться тревога, о которой никто не должен знать заранее вплоть до 18.00 того дня, на который она назначена.

«Как легко видеть, — писал О'Коннор, — из самого определения следует, что никакой тревоги вообще быть не может». О'Коннор, по-видимому, имел в виду, что объявить тревогу, не нарушив при этом вышеприведенного условия, невозможно. Аналогичного мнения придерживаются и авторы более поздних статей.

Если бы парадокс этим исчерпывался, то можно было бы присоединиться к мнению О'Коннора, которому вся

проблема показалась «сущим пустяком». Однако Скривен первым заметил нечто, ускользнувшее от внимания остальных авторов и делающее проблему далеко не такой простой. Чтобы уяснить суть замечания Скривена, вернемся к истории с человеком, брошенным в тюрьму. Безупречными логическими рассуждениями его, казалось бы, убедили в том, что, не нарушив приговора, казнь совершить невозможно. И вдруг, к немалому удивлению осужденного, в четверг утром в камеру является палач. Осужденный, конечно, этого не ждал, но самое удивительное, что приговор оказался совершенно точным — его можно привести в исполнение в полном соответствии с формулировкой. «Мне кажется, — пишет Скривен, — что именно грубое вторжение внешнего мира, разрушающее тонкие логические построения, придает парадоксу особую пикантность. Логик с трогательным постоянством произносит заклинания, которые в прошлом приводили к нужному результату, но чудовище — реальность — на этот раз отказывается повиноваться и продолжает следовать своим путем».

Чтобы разобраться в тех лингвистических трудностях, с которыми мы встречаемся в этом парадоксе, следует привести две новые его формулировки, эквивалентные первой. Это поможет нам исключить различного рода факторы, не относящиеся к делу и лишь затемняющие конечный результат: возможность изменения приговора судьей, смерть заключенного до казни и т. д.

Рассмотрим первый вариант парадокса, предложенный Скривеном, — парадокс с яйцом-сюрпризом.

Представьте себе, что перед вами стоят десять коробок, перенумерованных числами от *1* до *10* (рис. 47). Вы отворачиваетесь, а ваш приятель кладет в одну из коробок яйцо и просит вас повернуться обратно. «Открывай все коробки по очереди, — говорит он, — сначала первую, потом вторую и так по порядку до десятой. Гарантирую, что в одной из них лежит яйцо-сюрприз. Назвав яйцо сюрпризом, я имею в виду, что ты не сможешь узнать номер коробки с яйцом до тех пор, пока не откроешь эту коробку и сам не увидишь яйца».

Предположим, что ваш приятель всегда говорит только правду. Выполнимо ли тогда его предсказание? Очевидно, нет. Он наверняка не положит яйцо в коробку *10*, потому что, открыв первые девять коробок и ничего в

Рис. 47. Парадокс с яйцом-сюрпризом.

них не обнаружив, вы сможете с уверенностью утверждать, что яйцо лежит в единственной оставшейся коробке. Это противоречило бы предсказанию вашего приятеля, поэтому десятая коробка исключается. Рассмотрим теперь, что получилось бы, если бы ваш приятель по несообразительности спрятал яйцо в девятую коробку. Первые восемь коробок тогда окажутся пустыми, и перед вами останутся две закрытые коробки: девятая и десятая. В десятой коробке яйца быть не может, следовательно, оно лежит в коробке *9*. Вы открываете девятую коробку, и яйцо, конечно, оказывается там. Однако ясно, что яйцо нельзя считать сюрпризом. Таким образом, мы опять доказали, что ваш приятель неправ. Коробка *9* тоже исключается. Но именно в этот самый момент вы и «отрываетесь от реальности»: с помощью аналогичных рассуждений можно исключить сначала восьмую коробку, затем седьмую и так далее, вплоть до первой! Наконец, будучи абсолютно уверенным в том, что все десять коробок пустые, вы начинаете их по очереди открывать и... Что это белеет в коробке *5*? Яйцо-сюрприз! Итак, вопреки всем вашим рассуждениям предсказание вашего друга оправдалось. Значит, ошиблись вы, но в чем?

Рис. 48. Парадокс с непредсказуемой картой.

Чтобы придать парадоксу еще более «парадоксальную» форму, рассмотрим третий вариант его формулировки, который можно назвать парадоксом с непредсказуемой картой. Представьте себе, что за столиком напротив вас сидит ваш приятель и держит в руках тринадцать карт масти пик. Перетасовав эти карты и расправив их в руке веером, картинками к себе, он выкладывает на стол одну закрытую карту. Вы должны медленно перечислить по порядку все тринадцать карт, начиная с туза * и кончая королем. Когда вы назовете лежащую на столе карту, ваш приятель должен сказать «да», во всех остальных случаях он говорит «нет».

— Ставлю тысячу долларов против десяти центов, — говорит он, — что ты не сможешь определить эту карту до тех пор, пока я не скажу «да».

Предположим, что ваш приятель сделает все от него зависящее, чтобы не лишиться денег. Может ли он при этом условии положить на стол короля пик? Очевидно, что нет. После того как вы перечислите первые двенадцать карт, останется только король, и вы с полной уверенностью его назовете. Может быть, перевернутая карта — дама? Нет, потому что после того, как будет назван валет, останутся лишь две карты: король и дама. Поскольку короля вы уже исключили, неизвестная кар-

* Туз соответствует 1, валет — 11, дама — 12 и король — 13 очкам.

та может быть только дамой. Казалось бы, все правильно, и вы опять выигрываете 1000 долларов. Аналогично исключаются и все остальные возможности. Выходит, что независимо от карты вы ее знаете наперед. Приведенная выше цепочка умозаключений кажется неуязвимой. С другой стороны, очевидно, что, глядя на оборотную сторону перевернутой карты, вы не имеете ни малейшего представления о том, что это за карта!

Даже в упрощенном варианте этого парадокса (с двумя днями, с двумя коробками или всего с двумя картами) трудно отделаться от ощущения какой-то весьма своеобразной неясности. Пусть у вашего приятеля есть только туз и двойка. Если он положит на стол двойку, то вы действительно выигрываете. Назвав туза, вы его тем самым исключили и с полной уверенностью можете заявить: «Я пришел к выводу, что на столе лежит двойка». Делая такое заключение, вы исходите из предположения, что справедливо следующее утверждение: «Лежащая передо мной карта должна быть либо тузом пик, либо двойкой пик». (В трех соответствующих вариантах парадокса предполагается, что осужденный будет повешен, карты будут только такими, какие назвал ваш приятель, и что в одной из коробок непременно лежит яйцо.) Вы ни в чем не погрешили против логики и вправе надеяться, что вам удастся выиграть у вашего приятеля 1000 долларов.

Предположим, однако, что ваш приятель положил на стол туза пик. Можете ли вы сразу сообразить, что выложенная им карта — именно туз? Безусловно, ваш приятель не стал бы рисковать 1000 долларов, положив двойку. Поэтому неизвестная карта *должна* быть тузом. Вы произносите эти слова вслух и слышите в ответ «да». Есть ли у вас основания считать, что вы выиграли пари?

Как ни странно, но таких оснований у вас нет. Пытаясь разобраться в причинах столь странного утверждения, мы подходим к самой сути нашего парадокса. Ваше предыдущее заключение основывалось на том, что карта может быть либо тузом, либо двойкой, поэтому если неизвестная карта не является тузом, то она обязательно должна быть двойкой. Однако здесь вы использовали еще одно дополнительное предположение: вы считаете, что ваш приятель говорит правду или, попросту говоря, делает все от него зависящее, чтобы не

потерять 1000 долларов. Но если вы путем логических рассуждений установите, что иа столе лежит именно туз, то спасти свои 1000 долларов ваш приятель не сможет, даже если он выложит не двойку, а туза. Поскольку ваш приятель в любом случае лишается своих денег, у него нет оснований предпочитать одну карту другой. Стоит это понять, как ваша уверенность в том, что на столе лежит туз, сразу становится весьма шаткой. Правда, вы поступаете вполне разумно, держа пари, что неизвестная карта — туз, потому что она на самом деле может оказаться тузом. Но ведь для выигрыша требуется гораздо больше: вы должны доказать, что пришли к своему выводу с помощью «железной» логики, а это невозможно. Таким образом, в ваших рассуждениях содержится порочный круг. Сиачала вы предполагаете, что ваш приятель предсказал событие правильно, и, опираясь на свое предположение, делаете вывод, согласно которому неизвестная карта должна быть тузом. Но если на столе лежит туз, то ваш приятель ошибся в своем предсказании и, следовательно, вам ие на что опереться при отгадывании перевернутой карты. Но и это еще не все. Раз вы ие можете определить карту, то предсказание вашего друга верно. Следовательно, вы вернулись в исходную точку, и весь круг начинается сначала. В этом смысле ситуация напоминает порочный круг в рассуждениях, связанных с известным парадоксом, предложенным впервые английским математиком П. Э. Б. Журденом в 1913 году (рис. 49). В рассуждениях, аналогичных описанным выше, вы ходите по кругу, все время возвращаясь в исходную позицию: определить логическим путем, какая карта лежит иа столе, невозможно. Не исключено, конечно, что вы ее угадаете. Зная своего приятеля, вы можете прийти к заключению, что иа столе, вероятнее всего, лежит туз. Однако ни один уважающий себя логик ие назовет схему ваших умозаключений безукоризненно строгой.

Вся необоснованность ваших умозаключений становится особенно наглядной иа примере с десятью коробками. Сначала вы «делаете вывод», что яйцо лежит в коробке *1* (рис. 47), но эта коробка оказывается пустой. Отсюда вы заключаете, что яйцо положено в коробку *2*, но и в ней ие находите ничего. Это наталкивает вас на мысль, что яйцо лежит в коробке *3*, и т. д. (Все проис-

ходит так, словно за секунду до того, как вы заглянете в коробку, где, по вашему мнению, должно лежать яйцо, кто-то совершенно непонятным образом перекладывает его в коробку с бо́льшим номером.) Наконец вы находите долгожданное яйцо в коробке *8*. Можно ли теперь назвать это событие заранее предвиденным, а все ваши рассуждения считать безупречными с точки зрения логики? Безусловно, нет, потому что вы восемь раз воспользовались одним и тем же методом и в семи случаях получили неверный результат. Легко понять, что яйцо может быть в любой коробке, *в том числе и в самой последней*.

Даже после того как вы открыли 9 пустых коробок, вопрос о том, можно ли логическим путем прийти к заключению о местонахождении яйца (находится ли оно в коробке *10* или нет), остается открытым. Приняв лишь одно предположение («Одна из коробок непременно содержит яйцо»), вы, разумеется, будете вправе

Рис. 49. Парадокс с карточкой Журдена.

утверждать, не вступая в противоречие с законами логики, что яйцо находится в коробке *10*. В этом случае обнаружение яйца в коробке *10* — событие, предсказуемое заранее, а утверждение о том, что будто его нельзя предсказать, ложно. Приняв еще одно предположение (что ваш приятель говорит правду, когда утверждает, что «координаты» яйца, то есть номер коробки с яйцом, нельзя предсказать заранее), вы лишите себя возможности делать какие-либо логические выводы, ибо, согласно первому предположению, яйцо должно находиться в коробке *10* (и вы можете утверждать это заранее), а согласно второму — вы должны обнаружить яйцо внезапно для себя. Поскольку прийти к какому-либо заключению нельзя, обнаружение яйца в коробке *10* следует считать непредсказуемым заранее событием, а оба предположения — правильными, но их «реабилитация» наступит не раньше, чем вы откроете последнюю коробку и обнаружите в ней яйцо.

Проследим еще раз решение парадокса, придав ему на этот раз форму парадокса о человеке, приговоренном к повешению. Теперь мы знаем, что судья сформулировал приговор правильно, а узник рассуждал неверно. Ошибочным являлся самый первый шаг в его рассуждении, когда он полагал, будто его не могут повесить в последний день недели. На самом же деле у осужденного нет оснований делать какие бы то ни было заключения о своей судьбе даже в вечер накануне казни (ситуация здесь та же, что и в парадоксе с яйцом, когда остается закрытой одна последняя коробка). Эта мысль играет решающую роль в работе известного логика Куайна, написанной им в 1953 году.

Куайн сообщает, как бы он рассуждал на месте узника. Следует различать четыре случая: первый — меня повесят завтра днем, и я знаю об этом уже сейчас (но на самом деле я этого не знаю); второй — меня не повесят завтра днем, и я знаю об этом уже сейчас (но на самом деле я этого не знаю); третий — меня не повесят завтра днем, но сейчас я об этом не знаю и, наконец, четвертый — меня повесят завтра днем, но сейчас я об этом не знаю.

Два последних случая являются возможными, последний из них означал бы приведение приговора в исполнение. В такой ситуации незачем загадывать вперед

и ловить судью на противоречиях. Остается лишь ждать, надеясь на лучшее.

Шотландский математик Томас Г. О'Бейрн в статье с несколько парадоксальным названием «Может ли неожиданное *никогда* не произойти?» * дает великолепный анализ обсуждаемого парадокса. Как показывает О'Бейрн, ключ к решению парадокса лежит в осознании одного довольно простого обстоятельства: один человек располагает сведениями, которые позволяют ему считать правильным предсказание какого-то события в будущем, другой ничего не может сказать о правильности предсказания до тех пор, пока это событие не произойдет. Нетрудно привести простые примеры, подтверждающие мысль О'Бейрна. Пусть кто-нибудь, протягивая вам коробку, говорит: «Откройте ее — внутри яйцо». Он-то знает, что его предсказание верно, вы же не знаете этого до тех пор, пока не откроете коробки.

То же самое можно сказать о нашем парадоксе. И судья, и человек, кладущий яйцо в одну из коробок, и наш приятель с тринадцатью картами — каждый из них знает, что его предсказание должно исполниться. Однако их слова с предсказанием не могут служить основанием для цепочки рассуждений, приводящей в конечном счете к опровержению самого предсказания. Именно здесь кроется то бесконечное блуждание по кругу, которое, подобно фразе на лицевой стороне карточки из парадокса Журдена, обрекает на неудачу все попытки доказать ошибочность предсказания.

Суть нашего парадокса станет особенно ясной, если воспользоваться одной идеей, высказанной в статье Скривена. Предположим, что муж говорит своей жене: «Я сделаю тебе ко дню рождения сюрприз. Ты ни за что не догадаешься, какой подарок тебя ожидает. Это тот самый золотой браслет, который ты видела на прошлой неделе в витрине ювелирного магазина».

Что же теперь делать его несчастной жене? С одной стороны, она знает, что муж никогда не лжет и всегда выполняет свои обещания. Однако если он все же подарит ей золотой браслет, то это уже не будет сюрпризом и тогда обещание окажется невыполненным, то есть муж сказал ей неправду. А если это так, то к каким

* *The New Scientist*, May 25, 1961.

выводам может она прийти, рассуждая логически? Не исключено, что муж сдержит слово и подарит ей браслет, нарушив обещание удивить ее неожиданым подарком. С другой стороны, он может сдержать свое слово, что подарок будет неожиданным, но нарушить второе обещание и вместо золотого браслета подарит ей, например, новый пылесос. Поскольку муж своим утверждением сам себе противоречит, у нее нет никаких разумных оснований предпочесть одну из этих возможностей другой, следовательно, у нее нет оснований надеяться на золотой браслет. Нетрудно догадаться, что будет дальше: когда в день рождения муж преподнесет ей браслет, подарок мужа окажется для нее приятным сюрпризом, поскольку его нельзя предсказать заранее никакими логическими рассуждениями. Муж все время знал, что может сдержать слово и сдержит его. Жена же этого не знала до тех пор, пока обещанное событие не произошло. Утверждение мужа, которое еще вчера казалось ей чепухой и ввергло ее в запутаннейший клубок логических противоречий, сегодня вдруг стало абсолютно правильным и непротиворечивым благодаря появлению долгожданного золотого браслета.

На примере рассмотренных парадоксов мы ясно ощутили волшебную силу слова (или, точнее, если воспользоваться выражением Бурбаки, силу «вольности речи»). Она-то и делает парадоксы столь сложными и вместе с тем столь привлекательными.

Очень многие читатели сообщили о весьма остроумных попытках решения парадокса об осужденном, которого должны повесить в не предсказуемый заранее день недели. Некоторые из них даже посвятили решению парадокса целые статьи в серьезных журналах.

Л. Экбом, преподаватель математики из Стокгольма, сообщил нам историю, которая вполне могла послужить поводом для формулировки парадокса о неожиданной казни. Как-то раз в 1943 или 1944 году шведское радио сообщило о том, что на следующей неделе намечено объявить учебную воздушную тревогу. Чтобы проверить готовность войск ПВО, учения решено провести внезапно, так что даже утром в день тревоги ни один человек не сможет предугадать, в котором часу она бу-

дет объявлена. Автор письма усмотрел в этом логический парадокс и обсудил его со своими студентами. В 1947 году один из этих студентов, будучи в Принстоне, услышал какой-то из вариантов того же парадокса из уст известного математика и логика Курта Гёделя. Далее автор пишет, что сначала он никак не связывал происхождение обсуждаемого парадокса со случаем объявления тревоги по шведскому радио, но это событие вполне могло быть источником парадокса, поскольку Куайн впервые узнал об этом парадоксе в начале сороковых годов.

Ниже вы прочтете два письма, авторы которых вовсе не пытаются разрешить парадокс, но приводят ряд весьма забавных (и запутанных) рассуждений.

Уважаемая редакция!

При чтении статьи о парадоксе с яйцом-сюрпризом создается впечатление, будто автор, логически доказав, что яйцо не может лежать ни в одной из коробок, был несколько удивлен, обнаружив его в коробке с номером 5. На первый взгляд это и в самом деле удивительно, но после тщательного анализа задачи можно доказать, что яйцо всегда будет находиться в коробке 5.

Доказательство проводится следующим образом.

Пусть S — множество всех утверждений, а T — множество всех правильных (истинных) утверждений. Любой элемент множества (то есть любое утверждение) может принадлежать либо множеству T, либо множеству $C = S - T$, то есть дополнению множества T, но не может принадлежать тому и другому множеству одновременно. Рассмотрим следующие два утверждения.

1. Каждое утверждение, написанное в этом прямоугольнике, принадлежит множеству C. *2. Яйцо всегда должно лежать в коробке 5.*

Утверждение 1 принадлежит либо множеству T, либо множеству C, но не тому и другому одновременно.

Если утверждение 1 принадлежит множеству T, то оно истинно. Но если оно истинно, то любое утверждение, написанное в прямоугольной рамке — в том числе и утверждение 1, — принадлежит множеству C. Таким образом, предположив, что утверждение 1 принадлежит множеству T, мы получим, что оно принадлежит множеству C, то есть придем к противоречию.

Предположим теперь, что утверждение 1 принадлежит множеству C. Тогда нам придется рассмотреть два случая: случай, когда утверждение 2 принадлежит множеству C, и случай, когда утверждение 2 принадлежит множеству T.

Пусть утверждение 2 принадлежит множеству С, тогда утверждения 1 и 2, то есть оба утверждения, обведенные прямоугольной рамкой, принадлежат множеству С. Именно в этом и состоит утверждение 1; следовательно, оно истинно и должно принадлежать множеству Т. Таким образом, предположив, что оба утверждения 1 и 2 принадлежат множеству С, мы получили, что утверждение 1 принадлежит множеству Т, то есть опять пришли к противоречию.

Если же утверждение 2 принадлежит множеству Т (а утверждение 1 — множеству С), то утверждение 1, смысл которого сводится к тому, что каждое из утверждений, заключенных в прямоугольную рамку, принадлежит множеству С, противоречит тому, что утверждение 2 есть элемент множества Т. Следовательно, утверждение 1 ложно и должно принадлежать множеству С в полном соответствии со сказанным выше.

Таким образом, существует единственный непротиворечивый случай: когда утверждение 1 принадлежит множеству С, а утверждение 2 — множеству Т. Последнее означает, что утверждение 2 истинно.

Следовательно, яйцо будет всегда лежать в коробке 5.

Как видите, особенно удивляться, обнаружив яйцо в коробке 5, не стоит.

ДЖ. ВЭРИЭН
Д. С. БЕРКС

Станфордский университет,
штат Калифорния.

Уважаемая редакция!

Я с огромным интересом прочитал парадокс о человеке, приговоренном к повешению. Не могу не заметить, что если бы наш узник был квалифицированным статистиком, то он предпочел бы, чтобы казнь назначили на среду, то есть на четвертый день недели. В самом деле, пусть известно, что заключенного могут повесить только один раз. Предположим, что судья назначает день казни случайным образом. Тогда вероятность того, что заключенному придется ждать казни x дней, равна $p(x) = 1/7$, иначе говоря, любое число дней от вынесения приговора до казни равновероятно. Эта задача является простым частным случаем более общего гипергеометрического распределения вероятности

$$p(x) = \frac{\left[\dfrac{(x-1)!}{(x-k)!\,(k-1)!}\right]\left[\dfrac{(N-x)!}{(N-x-h+k)!\,(h-k)!}\right]}{\dfrac{N!}{(N-h)!\,(h)!}},$$

где $p(x)$ — вероятность того, что для получения k благоприятных исходов необходимо провести x испытаний, причем известно, что h «кандидатов» в благоприятные исходы случайно распределены среди общего числа N возможных исходов. В нашей задаче $N = 7$ (если учесть, что одного повешения более чем достаточно), $h = k = 1$. Тогда математиче-

ское ожидание, или среднее значение, x составляет $1/7(1+2+\ldots+7)=4$ дня. Мне, однако, кажется, что никогда нельзя забывать о некоторых особенно въедливых читателях, которые исключат из рассмотрения среду на том основании, что она является «ожидаемым» днем.

МИЛЬТОН Р. СЭЙЛЕР

Уортингтон,
штат Огайо.

ГЛАВА 9

УЗЛЫ И КОЛЬЦА БОРРОМЕО

Американцам хорошо известен фирменный знак одного популярного сорта пива: три причудливо сцепленных кольца, показанных на рис. 50. Точно такие же кольца были изображены на фамильном гербе знаменитого в эпоху Возрождения итальянского семейства Борромео, поэтому иногда их называют кольцами Борромео. Разнять эти кольца нельзя, несмотря на то что никакие два кольца не сцеплены друг с другом. Достаточно взглянуть на рисунок, чтобы понять, что, какое бы из трех колец вы ни вынули, два оставшихся распадутся.

В главе 7 моей первой книги я упоминал о том, что не умею делать из бумаги модели поверхности без самопересечения так, чтобы три края этой поверхности соединялись, как кольца Борромео. «Может быть, — писал я, — кому-нибудь из остроумных читателей удастся построить такую модель».

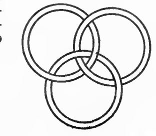


Рис. 50. Три кольца Борромео.

Мой вызов принял Дэвид А. Хаффмен. Он сумел не только построить несколько разных моделей с краями, сцепленными между собой, как кольца Борромео, но и обнаружил по ходу дела удивительно простые и изящные методы построения бумажных моделей поверхностей, края которых топологически эквивалентны какому-нибудь узлу или целой комбинации узлов, как угодно переплетенных или перепутанных между собой. Впоследствии Хаффмен обнаружил, что еще в самом начале 30-х годов нашего века топологи пользовались точно такими же методами, но описание этих методов можно было найти лишь в немецких математических журналах, поэтому они были известны только специалистам и ускользнули от внимания широкого читателя.

Прежде чем применять один из методов Хаффмена к кольцам Борромео, посмотрим, что он дает для какой-нибудь более простой структуры. Очевидно, простейшей замкнутой кривой в трехмерном пространстве является кривая, не имеющая узлов. Математики иногда называют такую кривую узлом с нулевым числом перекрещиваний, подобно тому как прямую называют кривой с нулевой кривизной. Именно такая кривая изображена на рис. 51, *а*. Заштрихованная внутренняя часть кривой означает двустороннюю поверхность, краем которой служит наша кривая. Такую поверхность нетрудно вырезать из бумаги: форма ее краев не имеет особого значения. Требуется лишь одно: край поверхности должен быть простой замкнутой кривой. Тот же рис. 51, *а* можно раскрасить иначе. Заштрихуем внешнюю часть кривой (рис. 51, *б*) и представим себе, что весь рисунок нанесен на поверхность сферы. Тогда замкнутая кривая будет границей отверстия в сфере. Обе модели (поверхность, вырезанная из бумаги, и сфера с отверстием) топологически эквивалентны. Если их края совместить, то получится замкнутая двусторонняя поверхность сферы.

Попробуем применить тот же метод к несколько более сложному случаю (рис. 51, *в*). Возьмем ту же самую пространственную кривую и представим себе, что она «сделана» из куска веревки. Точки скрещения, то есть точки, в которых один участок веревки проходит под другим, словно дорога, ныряющая под путепровод, мы будем обозначать разрывом на том участке кривой,

который располагается ниже. Получившуюся кривую также можно назвать узлом с нулевым скрещеиием, потому что, деформируя ее в пространстве, мы всегда можем избавиться от точки скрещения (порядок узла равен минимальному числу точек скрещения, которого можно достичь при непрерывной деформации узла). Схематическое изображение иашей поверхности снова раскрасим двумя красками так, чтобы никакие две области, имеющие общую границу, не были одного цвета. Это всегда можно сделать двумя способами, один из которых является как бы иегативиым, а другой — позитивным.

Если схематическое изображение поверхности раскрашено так, как показаио на рисунке 51, *в*, то модель представляет собой просто перекрученный на пол-оборота лист бумаги. Это двустороиняя поверхность, топологически эквивалентная каждой из предыдущих поверхностей. Если же мы раскрасим иашу поверхность так, как показано иа рис. 51, *г*, и белые участки будем считать отверстиями в сфере, то получится лист Мёбиуса. Его край также представляет собой узел с нулевым

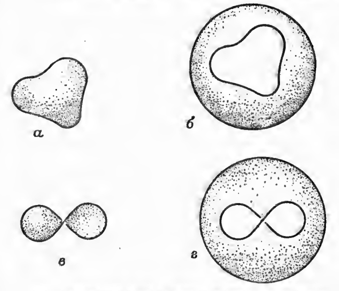


Рис. 51. **Модели поверхностей с краем, не завязанным в узел.**

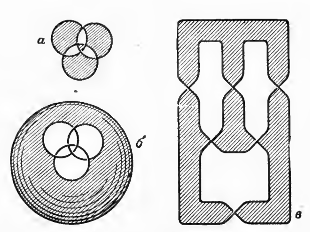


Рис. 52. Топологически эквивалентные односторонние поверхности, края которых сцеплены между собой, как кольца Борромео.

числом скрещений (то есть, строго говоря, вообще не узел). В отличие от предыдущих поверхностей лист Мёбиуса имеет всего лишь одну сторону. Если отверстие в сфере заклеить листом Мёбиуса, то получится замкнутая поверхность без края — так называемый кросс-кэп, или проективная плоскость. Построить модель такой поверхности без самопересечения невозможно.

Метод Хаффмена можно использовать для схемы любого узла и даже произвольной последовательности узлов. Посмотрим, что дает этот метод применительно к кольцам Борромео. Первый шаг состоит в том, чтобы изобразить кольца в виде системы «дорожных развязок», следя за тем, чтобы ни в одной точке не скрещивалось более двух дорог. Затем нужно раскрасить полученную схему двумя возможными способами — «негативным» и «позитивным» (рис. 52, *а* и *б*). Каждое скрещение означает, что в этом месте бумага (заштрихованные участки) перекручена в соответствующую сторону на пол-оборота. Изображенную на рис. 52, *а* одностороннюю поверхность несложно изготовить из бумаги либо именно в таком изящном симметричном виде, либо в виде топологически эквивалентной поверхности, показанной на рис. 52, *в*. На рис. 52, *б* изображена сфера с тремя отверстиями, края которых имеют вид колец

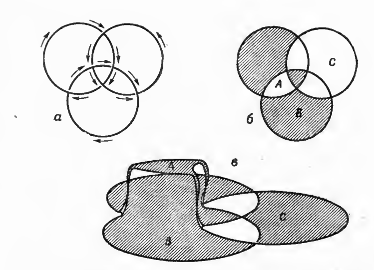


Рис. 53. Последовательные этапы построения двусторонней поверхности с краями, сцепленными между собой, как кольца Борромео.

Борромео. На первый взгляд может показаться, что модель такой поверхности не имеет ничего общего с предыдущей. На самом же деле обе модели топологически эквивалентны. Раскрашивая схемы поверхностей «позитивным» и «негативным» способами, иногда мы получаем эквивалентные, а иногда — неэквивалентные модели.

Можно доказать, что способ двоякой раскраски применим к любому узлу или к группе из нескольких узлов любого порядка, в какой бы последовательности они ни располагались друг за другом. Однако многие модели, построенные этим методом, оказываются односторонними. Иногда удается так перегруппировать скрещения, что модель становится двусторонней, однако обычно чрезвычайно трудно догадаться, что для этого нужно сделать. Существует метод, также повторно открытый Хаффменом, который гарантирует построение двусторонней поверхности.

Проиллюстрируем этот метод на примере колец Борромео. Сначала нарисуем тонкими линиями схему колец. Затем поставим острие карандаша в какую-нибудь точку одной из окружностей и обведем окружность еще

раз в любом направлении. В каждой точке скрещения необходимо указать стрелкой, в каком направлении мы движемся. Аналогично надо обвести и две остальные окружности. В результате мы получим схему, изображенную на рис. 53, *а*. Двигаясь в направлении, указанном стрелками, обведем все линии цветным карандашом. Начальной может быть любая точка на одной из кривых. Дойдя до скрещения, повернем налево или направо в зависимости от того, куда указывает стрелка, и будем двигаться по новому участку пути до тех пор, пока не дойдем до другого скрещения, здесь снова повернем в направлении стрелки и т. д. Мы двигаемся по схеме, как по системе автомобильных дорог, расположенных на разных уровнях: каждый раз, когда под нами или над нами оказывается какая-нибудь магистраль, мы немедленно сворачиваем на нее и продолжаем движение в том направлении, в каком следует остальной транспорт. Описав простую замкнутую кривую, мы заведомо вернемся в исходную точку. Переставим карандаш в какую-нибудь другую точку схемы и повторим все сначала, затем переставим карандаш в третью точку, и так до тех пор, пока не обведем целиком всю схему. Любопытно отметить, что нарисованные нами замкнутые кривые нигде не пересекаются. Получившаяся фигура показана на рис. 53, *б*.

Каждая замкнутая кривая на схеме отвечает определенному участку (области) бумажной модели. Там, где участки примыкают друг к другу, точки общей части границы между ними соответствуют «переходам» в виде перекрученных на пол-оборота полосок бумаги (в направлении, указанном на схеме стрелкой), соединяющим «сопредельные» участки. Если один участок расположен внутри другого, то меньший участок считается расположенным над бо́льшим, то есть поверхность в этом месте становится «двухэтажной». При таком расположении участков точки их общей границы по-прежнему отвечают «переходам» — перекрученным на пол-оборота полоскам бумаги, — но теперь эти полоски соединяют участки, находящиеся на разных уровнях. Окончательная модель изображена на рис. 53, *в*, это двусторонняя поверхность с тремя краями, топологически эквивалентными кольцам Борромео. Можно доказать, что любая модель, построенная описанным спо-

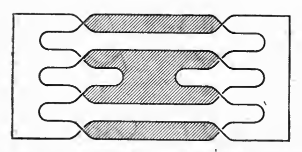


Рис. 54. Двусторонняя поверхность, края которой сцеплены между собой так же, как кольца Борромео.

собом, будет двусторонней. Следовательно, ее стороны можно раскрасить в разные цвета (или изготовить модель поверхности из листа бумаги, у которого лицевая и оборотная стороны разного цвета), не боясь, что цвета будут находить друг на друга. На рис. 54 показана чрезвычайно симметричная схема двусторонней поверхности, края которой образованы кольцами Борромео.

Может быть, вам захочется своими руками смастерить модели каких-нибудь других узлов или более сложных образований, состоящих из нескольких следующих один за другим узлов. Очень красивые поверхности получаются, например, из узла в форме восьмерки. Схема этого хорошо известного узла может быть, в частности, такой, как на рис. 55, *а*. Между прочим, с помощью аналогичных схем в теории узлов находят алгебраическое выражение для любого узла. Эквивалентные узлы, то есть узлы, которые можно перевести друг в друга путем непрерывной деформации, описываются одним и тем же алгебраическим выражением, однако не все узлы, которым отвечает одна и та же формула, эквивалентны. Узлы всегда считаются замкнутыми кривыми в трехмерном пространстве. Все узлы на веревках со свободными концами, а также на замкнутых кривых в четырехмерном пространстве всегда можно развязать, и поэтому они эквивалентны «узлам» с нулевым числом скрещений, то есть вообще не являются узлами.

Узел, похожий на восьмерку, — единственный из узлов, для которого минимальное число скрещений равно 4. Для узла, в котором веревка повторяет

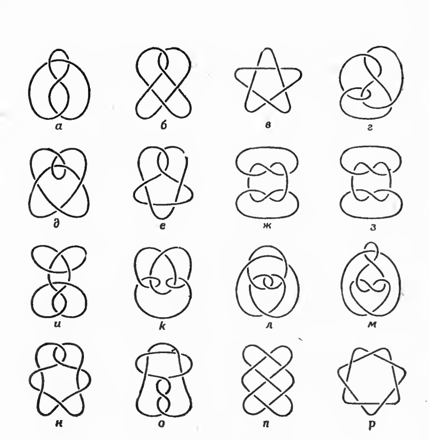


Рис. 55. Узлы с различным числом скрещений.

переплетение рук, сложенных на груди (везде в дальнейшем мы будем называть такой узел трилистником), минимальное число скрещений равно 3. Других узлов с числом скрещений, равным 3, не существует. В отличие от трилистника узел-восьмерка не имеет зеркального двойника, или, иными словами, при непрерывной деформации переходит в свое зеркальное отражение. Подобные узлы называются «амфихиральными», то есть «годными на любую руку». Они напоминают резиновую перчатку, которую, вывернув в случае необходимости наизнанку, можно надеть и на правую, и на левую руку.

Узлов с одним или двумя скрещениями не существует. Известно лишь 2 узла с пятью скрещениями, 5 узлов с шестью скрещениями и 8 узлов с семью скрещениями (рис. 55). На рис. 55 дано лишь по одному зеркальному двойнику каждого из узлов, но зато на нем приведены узлы, составленные из двух последовательно завязанных более простых узлов. Например, прямой узел *ж* состоит из трилистника и его зеркального двойника, ложный прямой узел *з* составлен из двух одинаковых трилистников. Узлам *в* и *р* отвечают очень простые модели поверхностей. Возьмем полоску бумаги, перекрутим ее на пять полуоборотов и склеим концы — получится поверхность, край которой имеет форму узла *в*. Сделав семь полуоборотов, мы получим поверхность с краем, имеющим форму узла *р*.

Все 16 узлов на рис. 55 можно изобразить так, чтобы «веревка» в местах скрещения попеременно то выходила наверх, то пряталась вниз (лишь узел *ж* изображен иначе). Когда число скрещений достигает восьми, появляются первые узлы (их всего 3), для которых нельзя нарисовать схемы с правильным чередованием «верхних» и «нижних» скрещений.

Может возникнуть вопрос, почему узел *и*, составленный из трилистника и восьмерки, нельзя представить в виде двух разных схем, как, например, узлы *ж* и *з*, каждый из которых представляет собой комбинацию двух трилистников. Причина такого различия состоит в том, что часть узла *и*, которая имеет форму восьмерки, можно перевести в ее зеркальное отражение, не меняя ориентации той части, которая образоваиа трилистником. Поэтому существует лишь узел, показанный на рис. 55, *и*, и его зеркальное отражение (как целого).

Узел, который нельзя перевести путем непрерывной деформации в два менее сложных узла, завязанных последовательно один за другим, по аналогии с простыми числами называется простым узлом. Все узлы, изображенные на рис. 55, за исключением узлов *ж*, *з*, *и*, простые. Составлены подробные таблицы узлов, имеющих не более десяти скрещений, однако формула, позволяющая указывать число разных узлов, имеющих ровно n скрещений, до сих пор неизвестна. При $n = 10$ число различных узлов по-видимому, равно 167.

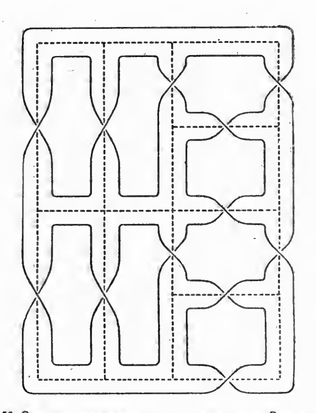


Рис. 56. Односторонняя поверхность с одним краем. Завязан ли он в узел?

О количестве простых узлов с $n = 11$ и $n = 12$ можно лишь догадываться.

Теория узлов тесно связана с топологией и, подобно ей, изобилует нерешенными проблемами. Не существует общего метода, с помощью которого можно было бы установить, эквивалентны или не эквивалентны друг другу любые два узла, сцеплены ли они между собой и даже «завязана» ли вообще узлом какая-нибудь сложная пространственная кривая. Насколько трудно бывает дать ответ на последний вопрос, можно судить по головоломке, изображенной на рис. 56. Перед нами причудливая односторонняя поверхность с одним краем (в

этом она схожа с листом Мёбиуса). Неясно лишь одно: «завязан» ли край узлом и если да, то каким? Сначала внимательно рассмотрите рисунок, выскажите свою догадку, а затем проверьте ее «экспериментально».

Сделайте бумажную модель поверхности и разрежьте ее вдоль пунктирных линий. У вас получится одна-единственная полоска, завязанная точно таким же узлом, как и кривая, ограничивающая поверхность. Стараясь не порвать бумагу, попытайтесь свести этот узел к его самому простому виду, и тогда станет ясно, правильной ли была ваша догадка. Результат может оказаться совершенно неожиданным.

В 60-х годах прошлого века британский физик Вильям Томсон (впоследствии ставший лордом Кельвином) разработал теорию, согласно которой атомы представляют собой вихревые кольца в несжимаемом всепроникающем, лишенном трения эфире. Впоследствии другой британский физик Дж. Дж. Томсон предположил, что молекулы являются комбинациями разных узлов и цепочек, составленных из кельвиновских вихревых колец. Гипотеза Томсона пробудила у физиков интерес к топологии (особенно увлекся ею шотландский физик Питер Гутри Тэт), но стоило вихревой теории потерпеть поражение, как этот интерес сразу улетучился. Не исключено, однако, что он опять возродится в связи с некоторыми недавними химическими исследованиями. Химикам-органикам удалось синтезировать совершенно новые вещества, названные катенанами, молекулы которых имеют вид цепочек. Они состоят из сцепленных колец. Теоретически возможно синтезировать соединения, молекулы которых будут иметь вид цепочек, переплетенных самым причудливым образом. Более подробно о катенанах рассказано в статье Эдель Вассерман «Химическая топология» *. Кто знает, какими неземными свойствами обладали бы углеродные соединения, если бы все их молекулы были завязаны каким-нибудь узлом, например узлом в форме восьмерки, или если бы эти молекулы соединялись по три, образуя кольца Борромео?

На первый взгляд в живых организмах не должно содержаться узлов, однако опыт показывает, что это

* *Scientific American*, November 1962, pp. 94—102.

утверждение неверно. Микробиолог Томас Д. Брок открыл шнурообразный микроб*, который при размножении завязывается в узел. Форма узла может быть различной: восьмерка, трилистник, прямой узел и т. д. Узел затягивается все сильнее и сильнее до тех пор, пока не превратится просто в утолщение на «шнуре». В этом месте шнур разрывается, и образуются два новых микроба. Прочтите великолепную статью Д. Иенсена «Хэгфиш»** и вы узнаете, как одна рыба из семейства миног умеет очищать свое тело от слизи и выполнять другие удивительные действия, завязываясь в трилистник.

А что, по-вашему, можно сказать о людях? Может быть, и они умеют завязывать узлы на каких-нибудь частях своего тела? Предлагаю вам немного посидеть *сложа руки* и подумать над этим вопросом.

ОТВЕТ

Сделав из бумаги поверхность, изображенную на рис. 56, и разрезав ее вдоль пунктирных линий, вы получите полоску «без начала и конца», на которой не будет никаких узлов. Тем самым вы докажете, что край исходной поверхности не был завязан в узел. Поверхность устроена так, что ее край топологически эквивалентен псевдоузлу, который фокусники называют узлом Чефало. Завязывается он следующим образом: завязав прямой узел, один из концов веревки пропускают сначала в верхнюю петлю, а затем в нижнюю, в результате чего узел исчезает, если веревку потянуть за оба конца.

* *Science*, **144**, № 1620, May 15, 1964, pp. 870—872.
** *Scientific American*, February 1966, pp. 82—90.

ГЛАВА 10

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО *e*

Это малое *e*
Так не нравится мне:
Если честно сказать,
Можно только назвать
Неприличным его поведенье

(в особенности если учесть,
что *e* — основание натуральных
логарифмов).

Дж. А. Линдон

В своей первой книге я уже упоминал о занимательных задачах, связанных с двумя фундаментальными математическими постоянными — числом π и золотым сечением φ. Эта глава посвящается третьей, не менее важной постоянной — числу e. Тому, кто не занимается математикой или естественными науками, приходилось встречаться с этим числом реже, чем с π или с φ. Однако в высшей математике число e играет важную роль и встречается буквально на каждом шагу. Фундаментальный характер числа e яснее всего проявляется при изучении роста какой-нибудь величины. Предположим, что кто-то положил один доллар в банк, выплачивающий 4% годовых. Если проценты простые, то каждый год сумма вклада возрастает на 4% от первоначального капитала. Каждый доллар через двадцать пять лет «вырастет» и превратится в два доллара. Если же банк выплачивает сложный процент, то доллар будет расти быстрее, потому что после каждого начисления процентов капитал немного увеличивается и в следующий раз процент начисляется от большей суммы. Чем чаще производят перерасчет и прибавление прибыли к основному капиталу, тем быстрее растет вклад. При ежегодном начислении сложных процентов доллар за 25 лет

превратится в $(1 + 1/25)^{25}$, то есть в 2,66 доллара. При начислении сложных процентов каждые полгода [если банк выплачивает 4 (сложных) процента годовых, то прирост вклада за каждые шесть месяцев составляет 2%] доллар за 25 лет превратится в $(1 + 1/50)^{50}$, или 2,69 доллара.

В рекламных проспектах банков их составители особо подчеркивают, сколько раз в год производится начисление прибыли. Непосвященному может показаться, что при достаточно частом начислении процентов (например, если производить пересчет миллион раз в год) за 25 лет доллар превратится в весьма ощутимую сумму. В действительности ничего подобного не произойдет. Через 25 лет один доллар вырос бы до величины $(1 + 1/n)^n$, где n — число начислений прибыли. При n, стремящемся к бесконечности, это выражение стремится к пределу, равному 2,718..., что всего на 3 цента больше той суммы, которая получилась бы, если бы прибыль начислялась лишь раз в полгода. Этот предел и называется числом e.

Предположим, что в банке, выплачивающем простой процент, один доллар через какой-то промежуток времени удваивается. При непрерывном начислении прибыли доллар за то же время превратился бы в e долларов независимо от того, сколько простых процентов прибыли выплачивает в действительности банк. Однако за очень большой промежуток времени даже очень маленькая ежегодная прибыль может увеличить первоначальный капитал до гигантской суммы. Если бы в первом году нашей эры кто-то положил один доллар в банк, выплачивающий 4% годовых, то к 1970 году на его счету было бы уже $(1{,}04)^{1970}$ долларов, то есть сумма вклада выражалась бы примерно тридцатипятизначным числом!

Не все величины возрастают так, как растет капитал в рассмотренных нами примерах. Тип роста, о котором шла речь, обладает одной весьма важной особенностью: в каждый момент времени скорость роста пропорциональна величине того, что возрастает. Иначе, говоря, отношение приращения изменяющейся величины к ее текущему значению всегда одно и то же. Величины такого типа изменяются подобно снежному кому, несущемуся с вершины горы: чем больше становится ком, тем

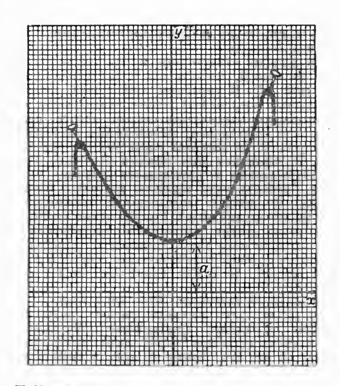


Рис. 57. Цепная линия.
Такую форму принимает висящая цепь. Уравнение этой кривой имеет вид $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$.

быстрее налипает на него снег. Этот тип роста свойствен многим процессам в живой и неживой природе. Все они описываются формулами, в которые входит функция $y = e^x$. Эта функция настолько важна, что она в отличие от других показательных функций, $y = a^x$, где $a \neq e$ (например, $y = 2^x$), получила особое название. Ее называют *экспоненциальной функцией* или кратко *экспонентой*. Экспонента в точности совпадает со своей производной. Именно этим и объясняется причина столь частого появления экспоненты в формулах математического анализа. Инженеры чаще пользуются десятичными логарифмами, в математическом анализе встречаются

почти исключительно натуральные логарифмы с основанием, равным числу e.

Если держать гибкую цепь за оба конца, то она провиснет по кривой, которая так и называется — цепная линия (рис. 57). В уравнение этой кривой, записанное в декартовых координатах, также входит число e. Тем же уравнением описывается сечение паруса, надутого ветром: если вертикальная составляющая скорости ветра равна нулю, то он выгибает парус так же, как направленная по вертикали сила земного тяготения изгибает цепь. Маршалловы и Каролинские острова, а также острова Гилберта — это вершины потухших подводных вулканов. В сечении вертикальной плоскостью они имеют форму цепной линии. Цепная линия не принадлежит к числу кривых, называемых коническими сечениями, хотя по виду очень напоминает параболу. Если вырезать из картона параболическое лекало и покатить его по прямой, то фокус параболы опишет цепную линию.

Французский энтомолог Жан Анри Фарб в книге «Жизнь паука» дает описание цепной линии, непревзойденное по своему красноречию: «Бессмысленное число e вновь предстает перед нами, начертанное на этот раз на паутине. Выйдя из дому в туманное утро, рассмотрим внимательно сплетенную за ночь паутину. Усеянные крохотными капельками, ее липкие нити провисают под тяжестью груза, образуя цепные линии, и вся сеть становится похожей на множество ожерелий, как бы повторяющих очертания невидимого колокола. Стоит лишь лучу солнца проникнуть сквозь туман, как паутина начинает переливаться всеми цветами радуги, превращаясь в сверкающую гроздь бриллиантов, и число e предстает перед нами во всем своем великолепии».

Как и число π, e — трансцендентное число, то есть оно не может быть корнем какого-нибудь алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Подобно тому как с помощью циркуля и линейки невозможно построить отрезок прямой, длина которого в соответствующих единицах в точности равна π, не существует и способа построения отрезка, длина которого выражалась бы числом e. Число e, так же как и число π, можно записать только двумя способами: либо в виде бесконечной цепной дроби, либо как сумму бесконечного ряда.

Вот, иапример, как записывается число e в виде цепиой дроби:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\dots}}}}}$$

Эту бескоиечиую дробь открыл в XVIII веке, великий математик Леоиард Эйлер. Ои же первым ввел символ e. (Возможно, Эйлер выбрал имеино букву e, поскольку оиа была следующей гласиой после a, которую он уже использовал, обозначив ею другую велнчииу. Одиако Эйлеру прииадлежит так миого открытий, связаииых с числом e, что в конце коицов e стали называть «числом Эйлера».)

Разложнв по степеням n выраженне $(1 + 1/n)^n$, мы получим следующий хорошо известиый ряд, сумма которого равна числу e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Восклицательный знак здесь означает факторнал ($3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $\dots$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$). Благодаря быстрой сходимости ряда число e несложио вычислить с точиостью до любого десятичного зиака (во всяком случае, проще, чем π). В 1952 году сотрудиики Иллинойсского уииверситета вычислили 60 000 знаков числа e, а в 1961 году иа одиой из машии IBM было получеио уже 100 265 десятичных зиаков числа e! (На этот раз восклицательиый зиак уже ие означает факториала.) В чнсле e, так же как и в числе π, десятичные зиаки нигде ие обрываются, а иайти закон, по которому оии чередуются, пока иикому не удалось.

Существует лн какое-нибудь соотношенне, связывающее два нанболее нзвестных трансцендентных чнсла π и e? Да, существует и не одно. Нанболее известна

следующая формула, выведенная Эйлером на основании одного открытия, сделанного до него Абрагамом де Муавром:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

«Лаконичное, изящное, исполненное глубокого смысла, — так отзываются об этом соотношении Э. Каснер и Дж. Р. Ньюмен в книге «Математика и воображение»*. — Мы лишь воспроизводим его, не вдаваясь в детальное изучение. Для исследования этого соотношения нужны объединенные усилия математиков, ученых-естественников и философов». В приведенное выражение входят пять основных величин: 1, 0, π, e и $i (= \sqrt{-1})$. Каснер и Ньюмен рассказывают, как был поражен этой формулой Бенджамин Пирс (математик из Гарвардского университета, отец философа Чарлза Сандерса Пирса). «Джентльмены, — обратился он как-то раз к студентам, написав эту формулу на доске, — я уверен, что написанная формула абсолютно парадоксальна. Мы не в состоянии ее понять и не знаем, что она означает, однако мы ее доказали и поэтому считаем, что она должна быть верной».

Факториал числа n равен числу перестановок из n предметов, поэтому не удивительно, что число e появляется в задачах теории вероятностей, связанных с перестановками. Классическим примером является следующая задача о перепутанных шляпах. Десять мужчин сдали в гардероб свои шляпы. Прежде чем выдать номера, гардеробщица случайно перепутала их. Спрашивается, с какой вероятностью хотя бы один из владельцев получит свою собственную шляпу. (Существуют и другие формулировки этой задачи. Например, речь может идти о рассеянной секретарше, которая положила как попало несколько писем в заранее надписанные конверты. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет по назначению? Или: однажды всех матросов отпустили в увольнение на берег; вернувшись навеселе, они замертво попадали на первые попавшиеся койки.

* E. Kasner, J. R. Newman, Mathematics and imagination, London, Bell, 1950.

Какова вероятность того, что один матрос спит на своей койке?)

Для решения задачи нужно знать две величины: во-первых, число всех перестановок из 10 шляп и, во-вторых, число «совершенно беспорядочных» перестановок, то есть число перестановок, при которых ни один владелец шляпы не получает свою шляпу. Первое число просто равно 10!, то есть 3 628 800. Однако вряд ли кто-нибудь отважится выписать все эти перестановки, чтобы отобрать из них «совершенно беспорядочные». К счастью, существует один простой, хотя и несколько необычный, метод нахождения нужного числа. Оказывается, что число «совершенно беспорядочных» перестановок из n предметов равно целому числу, ближайшему к дроби $n!/e$. В нашем случае таким целым числом является 1 334 961, поэтому вероятность того, что ни один человек не получит назад свою шляпу, равна $1\,334\,961/3\,628\,800 = 0{,}367\,879...$ Последнее число очень близко к $10!/10!e$. Сократив 10! в числителе и знаменателе, получим $1/e$. Следовательно, вычисленная нами вероятность почти не отличается от $1/e$. Итак, вероятность того, что все шляпы оказались перепутанными, нам известна. Очевидно, что всегда происходит одно из двух: либо все шляпы оказываются перепутанными, либо хотя бы одна из них возвращается к своему владельцу. Следовательно, вычитая $1/e$ из 1 (вероятность достоверного события равна 1), мы получаем вероятность того, что по крайней мере один человек получает свою шляпу назад. Итак, искомая вероятность оказывается равной 0,6321, что составляет почти $^2/_3$.

У только что решенной задачи есть одна странная особенность: после того как число шляп достигает шести или семи, дальнейшее его увеличение фактически не влияет на результат. Независимо от числа людей (будь их десять или десять миллионов), вероятность того, что одна или более шляп окажутся у владельцев, равна 0,6321. Из приведенной ниже таблицы видно, что вероятность того, что никто не получит свою шляпу, очень быстро достигает предела, равного $1/e = 0{,}3678794411$. Десятичная дробь, стоящая в последнем столбце таблицы, бесконечное число раз принимает значение, которое либо чуть-чуть больше, либо чуть-чуть меньше предельного.

Число шляп	Число перестановок	Число перестановок, при которых ни одна шляпа не возвращается к своему владельцу	Вероятность того, что никто не получит назад свою шляпу
1	1	0	0
2	2	1	0,5
3	6	2	0,333 333
4	24	9	0,375 000
5	120	44	0,366 666
6	720	265	0,3 778 014
7	5 040	1 854	0,367 857
8	40 320	14 833	0,367 881
9	362 880	133 496	0,367 879
10	3 628 806	1 334 961	0,367 879
11	39 916 800	14 684 570	0,367 879
12	479 001 600	176 214 841	0,367 879

Существует любопытный способ проверкн правильности полученного намн результата — с помощью следующей карточной нгры (нечто вроде солитера). Тщательно перетасовав карты, выкладывайте их по одной на стол вверх картинкой, называя одновременно вслух все 52 карты в заранее задуманной последовательности (например, сначала все карты мастн пнк от туза до короля, затем по порядку все карты червовой масти, затем — трефовой н бубновой). Вы вынграете, еслн хотя бы одна карта будет выложена на стол в тот момент, когда вы ее назовете. С какой вероятностью вы вынграете н с какой проиграете эту нгру?

Нетрудно понять, что эта задача ндентнчна задаче о шляпах. Интунтнвно кажется, что вероятность выигрыша мала: в лучшем случае не превосходит $^1/_2$. На самом же деле, как мы видели, она равна $(1 - 1/e)$, то есть почтн $^2/_3$. Это означает, что прн достаточно продолжительной сернн игр вы можете рассчнтывать на победу примерно в двух нз каждых трех партнй.

Первые двадцать знаков чнсла e после запятой выглядят так: 2,71828182845904523536. Существует замечательная дробь $^{355}/_{113}$, позволяющая получать значенне π с шестью десятнчнымн знаками. Дробь, выражающая число e с шестью десятнчнымн знаками, должна нметь

в числителе и знаменателе по крайней мере четырехзначные числа (например, $^{2721}/_{1001}$). Для вычисления e с четырьмя знаками можно придумать дробь, числитель и знаменатель которой состоят не более чем из трех цифр. Занявшись поисками таких дробей, вы быстро убедитесь в том, что найти их довольно сложно. Для тех, кто любит возиться с цифрами, я предлагаю найти дробь с трехзначными числителем и знаменателем, которая дает наилучшее возможное приближение для числа e.

Многие читатели прислали мне довольно неожиданные задачи, в которых число e либо сразу оказывалось ответом, либо, во всяком случае, входило в него. Я приведу здесь лишь два из них. При каком значении n корень n-й степени из n имеет максимальное значение? *Ответ*: при $n = e$ *.

Предположим, что вы берете наугад любые действительные числа из интервала от 0 до 1 до тех пор, пока их сумма не станет больше 1. Чему равно математическое ожидание (то есть среднее значение) числа выбранных вами случайным образом слагаемых? *Ответ*: числу e **.

Несколько лет назад, впервые столкнувшись со знаменитой формулой Эйлера, связывающей между собой числа π и e и мнимую единицу i, я заинтересовался, можно ли изобразить это соотношение графически. Мне не удалось этого сделать, зато Л. У. Х. Халл в статье «Сходимость на диаграмме Аргана» *** предложил простой и изящный подход к задаче. Сначала Халл разлагает $e^{i\pi}$ в бесконечный ряд, который затем изображается в комплексной плоскости в виде суммы бесконечного набора векторов. Из-за того что каждый член ряда отличается от предыдущего множителем i, каждый вектор, отвечающий любому члену ряда, повернут относительно вектора, отвечающего предыдущему члену, на 90°. Вся диаграмма на комплексной плоскости имеет вид спирали,

* H. Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, N. Y., 1965, p. 359.

** *Amer. Math. Monthly*, January 1961, p. 18, problem 3.

*** Mathematical Gazette, 43, № 345, October 1959, pp. 205—207.

образованной отрезками все меньшей и меньшей длины, которая стягивается к точке $-1 + 0i$.

Немногим известна следующая забавная задача, связанная с числами π и e: не пользуясь таблицами и не производя никаких вычислений на бумаге, определить, какое из двух чисел больше: e^{π} или π^{e}? Решить эту задачу можно многими способами.

ОТВЕТЫ

Какая дробь, числитель и знаменатель которой состоят каждый не более чем из трех цифр, дает наилучшее приближение для e? *Ответ*: дробь $^{878}/_{323}$. Записанная в десятичной форме, она имеет вид 2,71826..., то есть отличается от e лишь в пятом знаке после запятой (для любителей числовых курьезов: в числителе и в знаменателе этой дроби стоят числа-палиндромы, читающиеся одинаково справа налево и слева направо. Разность между числителем и знаменателем, равная 555, также выражается числом-палиндромом). Если в числителе и знаменателе зачеркнуть по одной цифре, то получившаяся дробь $^{87}/_{32}$ дает наилучшее приближение для числа e среди дробей с двузначными числителем и знаменателем.

ГЛАВА 11

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ ФИГУР

Много тысячелетий назад кто-то из первобытных людей впервые столкнулся с головоломкой — геометрической задачей на разрезание фигур. Произошло это, по-видимому, так. У первобытного человека была шкура какого-то животного, достаточно большая по размерам и неправильной формы. Ее требовалось разрезать на

Рис. 58. Решение задачи Абул-Вефа (три квадрата разделены на 9 частей).

части, а затем сшить их снова, чтобы придать шкуре нужную форму. Как же сделать, чтобы число разрезов и швов было наименьшим? Решение именно таких задач открывает перед занимательной геометрией необозримое поле деятельности.

Решения многих простых задач на разрезание были найдены еще древними греками, но первый систематический трактат на эту тему принадлежит перу Абул-Вефа, знаменитого персидского астронома X века, жившего в Багдаде. До нас дошли лишь отдельные фрагменты его книги, но это подлинные жемчужины. На рис. 58 показано, как Абул-Вефа разрезал три одинаковых квадрата на девять частей, из которых затем сложил один большой квадрат. Два квадрата он разрезал вдоль диагоналей, а четыре получившихся треугольника расположил вокруг неразрезанного квадрата. Еще четыре разреза (вдоль пунктирных линий) завершают решение задачи.

Геометры всерьез занялись решением задач о разрезании фигур на наименьшее число частей (и последующем составлении из них той или иной новой фигуры) лишь в начале нашего века. Одним из основоположников этого увлекательного раздела геометрии был знаменитый английский составитель головоломок Генри Э. Дьюдени. На рис. 59 показано его решение задачи Абул-Вефа. Три квадрата разрезаны лишь на 6 частей! Этот рекорд держится и поныне.

В наши дни любители головоломок увлекаются задачами на разрезание геометрических фигур по ряду причин, и прежде всего потому, что универсального метода решения задач на разрезание не существует и каждый, кто берется за такие задачи, может в полной мере проявить свою интуицию и способность к творческому мышлению. Поскольку здесь не требуется глубоких

познаний в области геометрии, любители иногда могут даже превзойти (и в действительности превосходят) профессионалов-математиков. Кроме того, в большинстве случаев не удается доказать, что разрезание произведено на минимальное число частей. В таблицу рекордов приходится постоянно вносить поправки, поскольку то и дело появляются новые, более простые решения старых задач.

Особенно большое число существовавших ранее рекордов по разрезанию фигур (больше, чем кто-либо из живущих ныне людей) побил эксперт австралийского патентного бюро Гарри Линдгрен. Он является ведущим специалистом в области разрезания фигур.

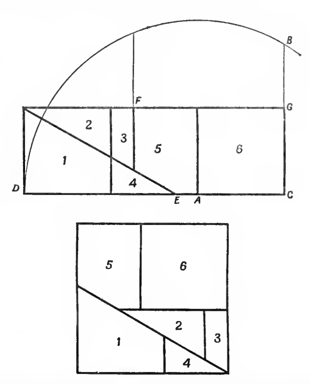


Рис. 59. Другое решение той же задачи (три квадрата разрезаны лишь на 6 частей). Центр окружности находится в точке A. $BC = DE = FG$.

	а	б	в	г	д	е
Квадрат	4					
Пятиугольник	6	6				
Шестиугольник	5	5	7			
Семиугольник	9	9	11	11		
Восьмиугольник	8	5	9	9	13	
Девятиугольник	9	12		14		
Десятиугольник	8	8	10	9	13	12
Двенадцатиугольник	8	6		6		

Рис. 60. Рекорды по разрезанию многоугольников (по состоянию на 1968 год). *а* — треугольник; *б* — квадрат; *в* — пятиугольник; *г* — шестиугольник; *д* — семиугольник; *е* — восьмиугольник.

Самым значительным событием в истории геометрии разрезаний по праву следует считать выход в свет его книги «Геометрия разрезаний»*. Это наиболее полное исследование на тему о разрезании фигур. По-видимому, книге Линдгрена на многие десятилетия суждено стать своего рода энциклопедией в этой области геометрии. В ней описаны все рекордные разрезания, кроме недавно найденного способа превращения разрезанного на 13 частей правильного десятиугольника в правильный семиугольник.

Линдгрен изучил задачи на разрезание всевозможных фигур, в том числе плоских фигур с криволинейными контурами и трехмерных фигур (насколько известно, ни один из любителей задач на разрезание пока еще не занялся фигурами в пространстве с числом измерений больше трех!), но основное внимание он сосредоточил на многоугольниках. Нетрудно доказать, что любой многоугольник можно разрезать на конечное число частей, которые после того, как мы расположим их по-другому, образуют любой другой многоугольник, равновеликий первому. Гораздо труднее свести число

* H. Lindgren, Geometric Dissections, Princeton, Van Nostrand, 1964.

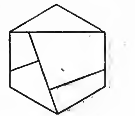
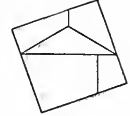



Рис. 61. Как разрезанием на 5 частей превратить правильный шестиугольник в квадрат.

частей, на которые разрезается многоугольник, до минимума.

Составленная Линдгреном таблица (рис. 60) показывает, какими были в 1968 году рекорды по разрезанию правильных многоугольников (каждому многоугольнику отведен специальный столбец таблицы). В клетке, стоящей на пересечении данного столбца со строкой, указано наименьшее число частей, из которых можно сложить и многоугольник, указанный под столбцом, и многоугольник, изображенный слева от соответствующей строки. Асимметричные части в случае необходимости разрешается переворачивать «вверх изнанкой», но решение без переворачивания считается более изящным. На рис. 61 показано принадлежащее Линдгрену превращение правильного шестиугольника в квадрат. Способ Линдгрена отличается от более широко известного способа, опубликованного Дьюдени в 1901 году (в решении Дьюдени правильный шестиугольник и квадрат также разрезались на 5 частей). В тех случаях, когда минимальное число частей достигается при разрезании несколькими способами, решения почти всегда полностью отличаются друг от друга.

Как же следует подходить к решению задач на разрезание?

Вот, например, один из методов Линдгрена. Каждую из фигур (разумеется, равновеликих) сначала следует каким-либо простым разрезом превратить в фигуру с параллельными сторонами так, чтобы, соединив одну за другой три или четыре новые фигуры, мы получили полоску с параллельными краями. Начертив обе полоски на кальке, их следует наложить одну на другую

и поворачивать, следя за тем, чтобы края каждой из полос проходили через точки другой полосы, которые Линдгрен назвал «конгруэнтными». После нескольких попыток удается обнаружить наилучшее решение.

Другой метод Линдгрена применим в тех случаях, когда каждый многоугольник может служить элементом паркета, заполняющего всю плоскость. Например, из маленьких квадратов и более крупных восьмиугольников можно выложить паркет, изображенный на рис. 62. Наложим на него другой паркет, составленный из больших квадратов, равновеликих восьмиугольникам, и маленьких квадратов тех же размеров, что и в первом паркете (на рис. 62 второй паркет изображен пунктиром). Полученное решение — превращение правильного восьмиугольника в квадрат разрезанием на 5 частей — было впервые найдено английским составителем головоломок Джеймсом Траверсом и опубликовано в 1933 году.

Некоторое представление о виртуозности Линдгрена можно получить из того, что он сумел превратить квадрат, разрезанный на девять частей, во-первых, в латинский крест и в равносторонний треугольник, во-вторых, в правильный шестиугольник и в равносторонний

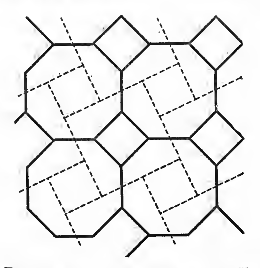


Рис. 62. Превращение правильного восьмиугольника в квадрат (разрезанием на 5 частей) с помощью паркетного метода.

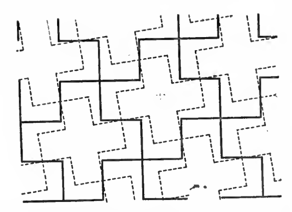


Рис. 63. Превращение греческого креста в греческие кресты меньших размеров с помощью паркетного метода.

треугольник и, в-третьих, в правильный восьмиугольник и в греческий крест (способы разрезания во всех трех случаях, разумеется, различны). Линдгрен также открыл способ, позволяющий превратить разрезанный на 12 частей греческий крест в три меньших греческих креста одинаковых размеров. «Улучшить имевшийся результат было нелегко», — авторитетно заявляет Линдгрен, имея в виду принадлежащий Дьюдени способ превращения большого греческого креста в три маленьких, требующий разрезания на 13 частей. Намного более легкую задачу — превращение греческого креста в два одинаковых креста меньших размеров — Дьюдени решил, разрезав большой крест на 5 частей. Неизвестно, пользовался ли он при этом линдгреновским методом наложенных паркетов. Линдгрен заметил, что греческие кресты служат особенно удобным объектом для применения этого метода. Наложив друг на друга два паркета (рис. 63), один — образованный большими крестами, другой — маленькими, мы сразу же получим решение Дьюдени.

Дьюдени сказал как-то, что тем, кто занимается решением задач на разрезание, «редко удается избежать ощущения красоты. Созерцать закон и порядок в природе приятно всегда, но особенно сильное впечатление они производят, когда возникают прямо на глазах. Даже тому, кто совсем не знает геометрии, трудно удержаться

от восклицания «Ах, как красиво!», когда он видит такие вещи. Я знаю нескольких людей, всерьез занявшихся изучением геометрии после того, как они испытали восторг от решения задач на разрезание».

ГЛАВА 12

ЦЕРКОВЬ ЧЕТВЕРТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Александр Поуп охарактеризовал однажды Лондон как «милый, смешной город, рассеивающий грусть». Вряд ли кто-нибудь возразит против подобного отзыва. Поэтому, собираясь нанести воображаемый визит в Лондон в поисках новых задач и головоломок, я не надеялся, что он сулит мне что-нибудь необычное. К счастью, мои ожидания не оправдались.

...Я сидел в номере гостиницы, расположенной в двух кварталах от площади Пиккадилли, просматривая лондонскую «Таймс», как вдруг мое внимание привлекло следующее объявление:

> «Если вы устали от трехмерного мира, посетите воскресную службу в церкви Четвертого Измерения. Начало службы — в одиннадцать часов утра в Платоновой пещере.
>
> Преподобный Артур Слейд,
> священник церкви Четвертого Измерения».

Я вырезал объявление и в первое же воскресенье отправился по указанному адресу. На улице было сыро и холодно, с моря надвигался легкий туман. Завернув за угол, я неожиданно увидел перед собой какое-то странное сооружение. Четыре огромных куба громоздились друг на друге, а к каждой боковой грани третьего снизу куба было прилеплено еще по одному такому же кубу. Я сразу понял, что передо мной развертка четырехмерного гиперкуба. Подобно тому как, разрезав

трехмерный куб вдоль семи ребер, мы получим его развертку в форме двумерного латинского креста (такую форму нередко имели в плане средневековые церкви), четырехмерный гиперкуб можно разрезать вдоль семнадцати квадратов и получить его развертку в форме трехмерного латинского креста.

Улыбающаяся молодая женщина, стоявшая в дверях, указала мне на винтовую лестницу, которая вела в подвал. Спустившись вниз, я попал в помещение, напоминавшее скорее всего кинозал, расположенный в известняковой пещере. Центральная стена его была выкрашена в белый цвет. Под потолком, наполняя пещеру розовым сиянием, ярко сверкали полупрозрачные розоватые сталактиты. Вдоль стен высились огромные сталагмиты. Со всех сторон, как в фантастическом фильме, неслись звуки электронного органа. Прикоснувшись к сталагмиту, я почувствовал, что он вибрирует у меня под рукой, словно холодная клавиша каменного ксилофона.

Я сел. Странная музыка продолжалась еще минут десять. Затем звуки стали понемногу стихать, а лившийся сверху свет — меркнуть. Откуда-то сзади появилось голубоватое сияние. Постепенно оно становилось все ярче, и на белой стене передо мной четко обозначились тени голов молящихся. Обернувшись, я увидел где-то вдали едва заметную светящуюся точку.

Музыка стихла, и в пещере стало совсем темно. Лишь центральная стена продолжала ярко светиться. Вдруг на ней возникла тень пастыря. Объявив, что он прочтет Послание к Ефесянам, глава 3, стих 17—18, пастырь начал проповедь. Его низкий звучный голос, казалось, исходил прямо от тени:

—...Чтобы вы, укоренные и утвержденные в любви, могли постигнуть со всеми святыми, что широта, и долгота, и глубина, и высота...

В церкви было слишком темно для того, чтобы делать какие-нибудь записи, но, насколько мне удалось запомнить, основной смысл проповеди Слейда сводился к следующему.

Окружающий нас космос, то есть мир, который мы видим, слышим, ощущаем, представляет собой трехмерную «поверхность» необъятного четырехмерного моря. Способность интуитивно ощущать и мысленно представ-

лять себе этот «совершенно иной» мир высшей размерности в каждом веке дана лишь нескольким избранным пророкам. Остальные проникают в гиперпространство косвенным путем, с помощью аналогий. Представьте себе Флатландию — двумерную страну теней, подобных теням на стене знаменитой Платоновой пещеры (см. Платон, «Республика», глава 7). Однако тени нематериальны, поэтому удобнее считать, что во Флатландии все объекты имеют бесконечно малую толщину, равную диаметру одной из флатландских фундаментальных частиц. Вообразим, что эти частицы плавают на гладкой поверхности какой-нибудь жидкости. Их танец подчиняется законам двумерного мира, поэтому обитателям Флатландии, чьи тела состоят из этих частиц, никогда не суждено понять, что, кроме двух известных им измерений, существует третье измерение, перпендикулярное двум измерениям Флатландии.

Однако, живя в трехмерном мире, можно увидеть любую частицу во Флатландии. Мы видим все, что происходит у них дома и внутри каждого флатландца. Мы можем, не вводя палец в их тело, потрогать в нем каждую частицу. Если вытащить флатландца из запертой комнаты через третье измерение, то ему это покажется чудом.

Аналогичным образом наш трехмерный мир плавает на спокойной поверхности гигантского четырехмерного гиперокеана; Эйнштейн в свое время предположил, что этот океан может быть огромной гиперсферой.

В четырехмерном пространстве толщина нашего мира равна диаметру фундаментальной частицы. Законы нашего мира определяются игрой «поверхностного натяжения» гиперморя. Поверхность гиперморя однородна, ибо в противном случае наши физические законы оказались бы неоднородными. Небольшая кривизна морской поверхности порождает небольшую постоянную кривизну нашего пространства — времени. В гиперпространстве тоже существует время. Если рассматривать время как четвертую координату, то в гипермире окажется пять измерений. Электромагнитные волны являются колебаниями поверхности гиперморя. Слейд подчеркнул, что лишь таким образом можно избежать возникновения парадокса о передаче энергии в пустом пространстве.

А что находится вне морской поверхности? Совершенно другой мир, в котором царствует бог! Теологам больше не придется выкручиваться из существующего противоречия между абстрактностью и постоянным присутствием бога. Любая точка трехмерного пространства одновременно принадлежит и гиперпространству, поэтому к любому из нас бог ближе, чем собственное дыхание. Он видит каждую частицу нашего мира и может к ней прикоснуться, не появляясь извне в нашем пространстве. И тем не менее божье царство лежит совершенно за пределами трехмерного мира в направлении, которое мы даже не в состоянии указать.

Мир был создан миллиарды лет назад, когда бог обрушил (в этом месте Слейд сделал паузу и пояснил, что сказанное следует понимать в переносном смысле) на поверхность гиперморя ливень гиперчастиц, имеющих асимметричное трехмерное сечение. Одни из этих гиперчастиц попали в трехмерное пространство, обладая правой симметрией, и превратились в нейтроны; другие, имеющие левую симметрию, образовали антинейтроны. Частицы, обладавшие противоположной «ручностью», попарно аннигилировали друг с другом. Каждая аннигиляция сопровождалась ужасным взрывом, но поскольку при падении гиперчастиц нейтронов образовалось немного больше, их избыток не уничтожился. Большая часть оставшихся нейтронов, распадаясь на протоны и электроны, образовала атомы водорода. Так началась эволюция нашего «одностороннего» материального мира. Под действием взрыва частицы стали распространяться во Вселенной, и до сих пор, чтобы поддерживать эту расширяющуюся Вселенную в более или менее устойчивом состоянии, бог периодически достает из своих запасов горсть гиперчастиц и кидает ее в море, пополняя тем самым количество вещества во Вселенной. Частицы, оказавшиеся антинейтронами, аннигилируют, а частицы, оказавшиеся нейтронами, продолжают существование. Каждый раз, когда в лаборатории рождается античастица, мы являемся свидетелями того, как в четырехмерном пространстве «опрокидывается» асимметричная частица. Это явление совершенно аналогично переворачиванию в пространстве трех измерений несимметричного плоского куска картона «вверх ногами». Таким образом, факт образования античастиц можно рас-

сматривать как экспериментальное доказательство существования пространства четырех измерений.

В заключение проповеди Слейд привел цитату из недавно обнаруженного Евангелия от Фомы: «Если начальствующие над тобой скажут тебе: „Знай, Царство Божие на небесах", — то путь тебе покажут птицы. Если они скажут тебе, что оно в море, то путь тебе покажут рыбы. Но Царство Божие в тебе самом, и оно вне тебя».

Снова зазвучала неземная органная мелодия. Голубое свечение погасло, и пещеру окутала тьма. Розовые сталактиты под потолком вновь постепенно засветились, и я зажмурился от удивления, обнаружив, что опять нахожусь в трехмерном пространстве.

Слейд, высокий темноволосый мужчина с черными усиками, стоял у входа в пещеру и приветствовал тех, кто слушал его проповедь. Когда мы пожимали друг другу руки, я представился.

— Как же, как же! — воскликнул Слейд. — У меня есть некоторые из ваших книг. Вы не спешите? Я скоро освобожусь, и мы могли бы побеседовать.

Пожав руку последнему прихожанину, Слейд провел меня к винтовой лестнице, которая закручивалась в другую сторону по сравнению с той, по которой я спускался. Мы поднялись в кабинет пастора, расположенный в самом верхнем кубе. Вдоль стен стояли самые разные сложные модели, представляющие собой проекции гиперструктур на трехмерное пространство. На одной стене висела большая репродукция с картины Сальвадора Дали «Распятие гиперкуба». На картине была изображена плоская клетчатая поверхность, над которой парил трехмерный крест из восьми кубов, представляющий собой точно такую же развертку гиперкуба, как церковь, внутри которой я находился.

— Скажите, Слейд, — спросил я, когда мы сели, — это ваша собственная идея или продолжение каких-нибудь старых традиций?

— Нет, идея отнюдь не нова, — ответил Слейд, — однако я считаю себя вправе утверждать, что мне принадлежит честь создания первой церкви, основанной на гипервере. Платон, конечно, не имел ни малейшего представления о четвертой координате в геометрии, тем не менее используемые им аналогии с пещерой очевидным образом подразумевают существование четвертого

измерения. На самом деле ясно, что любая форма платонова дуализма, когда все существующее делится на естественное и сверхъестественное, представляет собой просто нематематический способ обращения к пространствам высшей размерности. Генри Мор, философ-платоник XVII века из Кембриджа, первым в истории приписал миру церкви четыре измерения. Следующим был Иммануил Кант, который считал пространство и время некими субъективными линзами, сквозь которые нам виден лишь тонкий слой абстрактной реальности. После всего сказанного легко понять, что концепция пространства с бо́льшим числом измерений становится связующим звеном между современной наукой и общепринятыми религиями.

— Вы сказали «религиями», — перебил я. — Означает ли это, что ваша церковь не является христианской?

— Только в том смысле, что мы умеем видеть истину в любой из существующих на свете вер. Я хочу еще добавить, что за несколько последних десятилетий теологи-протестанты, живущие в континентальной Европе, наконец также открыли четвертое измерение. Говоря о «вертикальном», или «перпендикулярном», измерении, Карл Барт явно вкладывает в эти слова смысл четырехмерности пространства. И уж, конечно, самое полное и подробное признание пространств высшей размерности содержится в теологии Карла Хайма.

— Ну, ладно, — сказал я. — Недавно я прочел интересную книгу «Физик и Христианин». Ее автор — Вильям Г. Поллард — административный директор Института ядерных исследований в Окридже и одновременно епископальный священник. Он очень резко высказывается против концепции Хайма о гиперпространстве.

Слейд быстро записал название книги в свой блокнот.

— Надо будет ее посмотреть. Интересно, знает ли Поллард о том, что во второй половине прошлого века немало протестантов писали книги о четвертом измерении. Можно назвать, например, книгу А. Т. Шофилда «Мир иной», изданную в 1888 году, или книгу Артура Уиллинка «Мир невидимого», вышедшую в 1893 году (она имела подзаголовок «Очерк о связи с вечностью пространств высшей размерности»). Среди современных оккультистов и спиритуалистов тоже было немало споров по этому поводу. Много интересного можно, напри-

мер, прочесть в книгах Петера Д. Успенского, хотя большая часть его утверждений берет начало в идеях американского математика Чарлза Г. Хинтона. В 1920 году английский парапсихолог Уотели Кэрингтон написал несколько необычную книгу о «Теории механизма выживания» под псевдонимом У. Уотели Смит.

— Он имел в виду выживание после смерти?

Слейд отрицательно покачал головой.

— Я не могу согласиться с Кэрингтоном в том, что он верит в переворачивание стола с помощью невидимого рычага из четырехмерного пространства или рассматривает ясновидение как способность видеть из какой-нибудь точки, принадлежащей пространству высшей размерности, однако его основные гипотезы кажутся мне разумными. Наши тела являются трехмерными сечениями нас же самих, но в четырехмерном пространстве. Человек, конечно, подчиняется всем законам нашего мира, и в то же время его жизненный опыт постоянно записывается (наподобие того, как копится информация) в той части его собственного «я», которая относится к четвертой координате. Когда тело человека перестает существовать в трехмерном пространстве, эта запись хранится до тех пор, пока не найдется новое тело, в котором она сможет пройти новый жизненный цикл как в другом трехмерном объекте.

— Это мне, пожалуй, нравится, — сказал я. — Тогда полностью объясняется существующая в нашем мире зависимость духа от тела и в то же время появляется возможность для непрерывного перехода из земной жизни в потусторонний мир. Не похоже ли это на идеи, которые высказывает Вильям Джеймс в своей небольшой книжке о бессмертии?

— Совершенно верно. К сожалению, Джеймс не был математиком, поэтому ему приходилось изъясняться метафорически, не прибегая к помощи геометрии.

— А что вы скажете насчет некоторых медиумов, выступающих с так называемыми демонстрациями четвертого измерения? — поинтересовался я. — Не о них ли написал книгу один профессор астрофизики из Лейпцига?

В смехе Слейда послышались нотки замешательства.

— Вы правы, это действительно сделал бедняга Иоанн Карл Фридрих Цельнер. Его книга «Потусторонняя

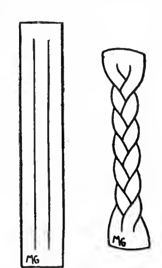


Рис. 64. Неужели эту кожаную полоску можно заплести лишь в четырехмерном пространстве?

физика» была переведена на английский язык в 1881 году, но сейчас даже перевод стал огромной редкостью. Цельнеру принадлежат интересные исследования в области спектрального анализа, но он считал ниже своего достоинства пользоваться методами фокусников, и в результате, по-видимому, попался на удочку американского медиума Генри Слейда.

— Слейда? — удивился я.

— Да, стыдно признаться, но мы с ним родственники. Он был моим двоюродным дедушкой. После его смерти осталось с дюжину толстых тетрадей, в которые он заносил свои методы. Эти тетради перешли по наследству к членам моей семьи с английской стороны, а потом были переданы мне.

— Невероятно интересно, — сказал я. — Не могли бы вы показать мне какой-нибудь фокус?

Моя просьба Слейду понравилась. Фокусы оказались одним из его хобби. Кроме того, Слейд считал, что некоторые фокусы Генри могут заинтересовать читателей с точки зрения математики.

Слейд достал из ящика письменного стола полоску кожи с двумя продольными разрезами, как показано на рис. 64 слева. Затем, протянув мне шариковую ручку, попросил как-нибудь пометить эту полоску, чтобы по ходу фокуса ее нельзя было подменить. Я поставил в углу полоски свои инициалы. Мы уселись за маленький стол друг против друга. Слейд несколько секунд подержал полоску под столом и затем показал мне ее снова. Узкие ленточки оказались переплетенными, как показано на рис. 64 справа! Подобное переплетение может получиться лишь в том случае, если ухитриться

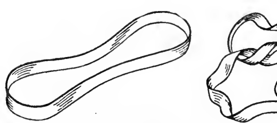


Рис. 65. Можно ли завязать узел на резиновой ленте, не выходя в четырехмерное пространство?

протащить все три ленточки через гиперпространство, в пространстве же трех измерений задача показалась мне невыполнимой.

Второй фокус был еще удивительнее. Слейд предложил мне внимательно рассмотреть широкое кольцо, вырезанное из мягкой резины (рис. 65). Затем он положил кольцо в спичечную коробку, торцы которой запечатал клейкой лентой. Слейд хотел было спрятать коробку под стол, но вдруг спохватился, что она никак не помечена. Я написал на этикетке жирную букву *X*.

— Хотите — держите ее сами под столом, — предложил Слейд.

Я согласился. Слейд нащупал под столом коробку и взялся за нее с другой стороны. Послышался шорох, и я почувствовал, будто коробка немного задрожала.

Слейд разжал руки.

— Теперь откройте, пожалуйста, коробку.

Вначале я ее очень внимательно осмотрел. Клейкая лента была на месте. На этикетке стояла моя пометка. Отковырнув ногтем клейкую ленту, я открыл коробку. Резиновая лента была завязана простым узлом, изображенным в правой части рис. 65.

— Даже если вы каким-то образом ухитрились открыть коробку и подменить кольцо, — сказал я, — то где вы раздобыли такую удивительную резинку?

— Мой дядя был искусным мошенником, — усмехнулся Слейд.

Мне было неудобно спрашивать Слейда о том, как делаются оба фокуса. Прежде чем заглянуть в ответ, попробуйте сообразить сами.

В тот день мы о многом говорили со Слейдом. Когда, наконец, я вышел из церкви Четвертого Измерения,

сырые улицы Лондона окутал густой туман. Я опять почувствовал себя в Платоновой пещере. Расплывчатые силуэты движущихся машин с эллиптическими светящимися фарами напомнили мне известные строки из Рубайята великого Омара Хайяма:

«Что все мы? Лишь блуждающие тени,
Подвластные любому мановенью
Волшебного светильника в руках
Великого Властителя движенья».

ОТВЕТЫ

В начале главы я говорил, что намерен нанести в Лондон «воображаемый визит», тем не менее многие читатели просили меня сообщить им адрес церкви Слейда. Преподобный Слейд — лицо абсолютно вымышленное, однако Генри Слейд в действительности был одним из самых ярких и удачливых мошенников в истории американского спиритуализма. Некоторые сведения о нем и основные литературные ссылки вы найдете в главе о Четвертом Измерении из моей книги «Этот правый, левый мир» *.

Способ заплетания кожаной полоски, продемонстрированный Слейдом, хорошо известен английским бойскаутам и всем тем, кто любит мастерить из кожи. Существует много книг, в которых описываются методы Слейда. Полный математический анализ можно найти в статье Дж. А. Х. Шепперда «Косы, которые можно заплетать из веревок со скрепленными вместе концами» **.

Вообще существует несколько способов плетения кос. Один из них показан на рис. 66. Проделав все операции несколько раз, вы получите косу, составленную из нескольких «элементарных» кос с шестью скрещениями, изображенных на рисунке.

Другой способ состоит в том, что вы заплетаете в верхней части полоски самую обычную косу с шестью скрещениями. Тогда в ее нижней части тоже образуется

* М. Гардиер, Этот правый, левый мир, М., изд-во «Мир», 1967.

** *Proceedings of the Royal Society*, A265 (1962), pp. 229—244.

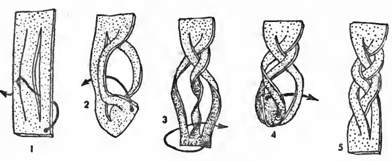


Рис. 66. Заплетание кожаной полоски.

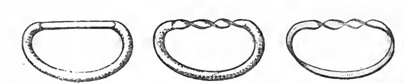


Рис. 67. Завязывание в узел резинового кольца.

коса, которая будет зеркальным отражением верхней. Избавиться от нижней косы чрезвычайно просто. Вы расплетаете ее одной рукой, а второй в это время придерживаете верхнюю, заплетенную, часть полоски, чтобы она не распустилась. Оба способа годятся и в том случае, если число узких ленточек больше трех. Если в вашем распоряжении имеется только жесткая кожа, то ее можно предварительно размягчить, положив в теплую воду.

Для фокуса с завязыванием узла на плоском резиновом кольце нужно прежде всего сделать такое кольцо. Возьмите сплошное резиновое кольцо с круглым поперечным сечением и аккуратно вырежьте на нем плоский участок (рис. 67). Сделав три полуоборота (средняя иллюстрация), срежьте лишнее с остальной части кольца, чтобы получилась трижды закрученная плоская лента. Проще всего заморозить резиновое кольцо, натянутое на деревянный кубик, а затем чем-нибудь его расплющить. Если затем эту плоскую ленту разрезать вдоль всей средней линии, то получится кольцо вдвое большей длины, завязанное на один узел.

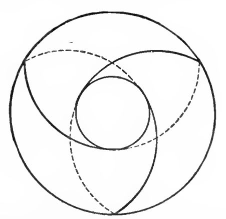


Рис. 68. Как, разрезав полый тор, получить завязанную в узел резиновую ленту.

Для фокуса еще понадобится второе резиновое кольцо точно такой же длины, но без узла. Кольцо с узлом кладется в спичечную коробку, а коробка запечатывается клейкой лентой. После этого надо как-нибудь подменить этой коробкой другую, в которой лежит кольцо без узла. Подмена совершается в тот момент, когда коробка прячется на мгновение под стол, после чего фокусник «вспоминает», что она не помечена. Подготовленную коробку можно заранее приклеить снизу к столу пластилином, а рядом прилепить еще один небольшой кусочек пластилина. Таким образом, хватит буквально секунды, чтобы приклеить под столом ненужную коробку и взять ту, которая нужна.

Существует и другой, более простой способ изготовления эластичной ленты, завязанной узлом. Возьмите полый резиновый тор (например, детское кольцо для зубов, которое продается в любой аптеке) и разрежьте его по пунктирным линиям, показанным на рис. 68. У вас получится широкая бесконечная лента (безусловно, потом ее можно сделать у́же), на которой будет завязан один узел.

Кстати, существует задача о завязывании узла на бесконечной эластичной ленте. Иллюзионист Уинстон Фрир, по словам очевидцев, умел завязывать такой узел тремя способами.

ГЛАВА 13

ЕЩЕ ВОСЕМЬ ЗАДАЧ

1. Задача о расстановке цифр. Изобретатель этой хитроумной цифровой задачи неизвестен. Цифры от 1 до 8 надо расставить в восьми кружках фигуры, изображенной на рис. 69, так, чтобы никакие два последовательных числа не стояли в кружках, соединенных друг с другом «напрямик». Например, если в самом верхнем кружке стоит цифра 5, то ни в один из трех кружков (*B*, *C*, *D*) следующего ряда уже нельзя вписать цифру 4 или 6, потому что каждый из этих кружков соединяется с верхним прямой линией. Существует единственное решение задачи (решения, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, различными не считаются), но найти его простым подбором, без анализа довольно трудно.

2. Девушка или тигр? В рассказе Фрэнка Стоктона «Девушка или тигр» говорится о жестоком царьке одного племени, который имел обыкновение весьма своеобразно осуществлять правосудие. Церемония эта выглядела так. Царек восседал в конце зала на высоком троне. В противоположной стене находились две двери. Подсудимому разрешалось открыть любую из них, целиком положившись на «беспристрастную и справедливую

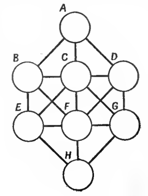


Рис. 69. Задача о расстановке цифр.

волю случая». За одной дверью сидел голодный тигр, за второй скрывалась симпатичная молоденькая девушка. Если из открытой двери выскакивал тигр, царек считал, что несчастный узник получил по заслугам за совершенное преступление. Если же из двери появлялась девушка, то, по мнению царька, это свидетельствовало о невиновности подсудимого, который получал не только свободу, но и руку прекрасной девушки (брачная церемония совершалась тут же в зале суда).

Однажды царьку стало известно о том, что его дочь и один из придворных любят друг друга. По велению царька несчастный юноша предстал перед судом. Дочь царька знает, за какой дверью сидит тигр, но ей также известно, что за другой дверью скрывается самая красивая придворная дама, которая как-то строила при ней глазки ее возлюбленному. Подсудимому известно, что принцесса знает, где находится тигр, а где — девушка. Принцесса делает рукой «быстрое, еле заметное движение» направо, после чего юноша открывает правую дверь. Рассказ заканчивается вопросом: «Кто появился из двери — тигр или девушка?»

Я долго размышлял над этой незаконченной историей и теперь могу рассказать вам, что произошло дальше. Двери располагались рядом и, наверное, открывались навстречу друг другу. Открыв правую дверь, придворный сразу дернул вторую и спрятался внутри треугольника, образованного стеной и двумя дверями. Выскочив из одной двери, тигр влетел во вторую и съел девушку. Царек был несколько обескуражен происшедшим, но, будучи человеком азартным, он созвал второй суд. Но на этот раз он уже не хотел, чтобы у хитреца были равные шансы выжить или погибнуть, поэтому зал переделали и вместо двух дверей в нем появилось целых шесть, разделенных на пары. За двумя дверями осужденного поджидали два голодных тигра. Две другие двери скрывали за собой тигра и девушку, а за двумя остальными дверями царек приказал поместить двух девушек-близнецов, одетых совершенно одинаково.

Жестокий план царька состоял в следующем. Сначала подсудимый должен выбрать любую пару дверей. Затем он указывает на одну дверь из этой пары, и ему бросают ключ от нее. Если за дверью окажется тигр, то справедливость (в понимании царька) уже торжествует.

Если же там будет девушка, то дверь моментально захлопнется. После этого девушку и ее неизвестного соседа (который может быть либо ее сестрой-близнецом, либо тигром) тайно от всех заставляют поменяться (или остаться на месте) комнатами в соответствии с тем, как упадет специальная золотая монета с изображением девушки на одной стороне и тигра — на другой. Подсудимому предлагается еще раз выбрать дверь из той же пары. При этом он не знает, заставили ли девушку и ее соседа поменяться местами или нет. Если подсудимый попадет на тигра, то «правосудие» свершится; если же перед подсудимым снова окажется девушка, то дверь снова захлопывается, процедура с монетой повторяется и юноше предоставляется последняя, третья возможность выбирать дверь. Если ему и здесь повезет, то всем мученьям придет конец и девушку отдадут ему в жены.

Наступил день суда. Все шло по плану. Подсудимый дважды открыл дверь, за которой находилась девушка. Все его попытки определить, была ли вторая девушка той же, что и первая, закончились неудачей. Лоб его покрылся испариной. Дочь царька, которая на этот раз ничего не знала о том, кто скрывается за дверями, побледнела.

Какова вероятность того, что ее возлюбленному и в третий раз удастся открыть дверь, за которой будет находиться девушка?

3. **Теннисный матч.** Миранда обыграла Розмари в теннис со счетом 6:3. В пяти играх победу одерживает та из девушек, которая не подает. Чьей была первая подача?

4. **Разноцветные кегли.** Один состоятельный человек держал у себя в подвале два кегельбана. На одном из них было десять темных кеглей, на втором — десять светлых. У владельца был математический склад ума, и однажды вечером, отдыхая за игрой в кегли, он придумал следующую задачу.

Предположим, что все кегли (и темные, и светлые) перемешаны. Можно ли выбрать десять кеглей так, чтобы, заполнив ими, как обычно, треугольную рамку, мы не могли обнаружить трех кеглей одного цвета

в вершинах не только этой рамки, но и любого равностороннего треугольника?

Если такой выбор кеглей возможен, покажите, как его делать. В противном случае докажите невозможность выбора. Задачу удобнее всего решать, имея под рукой набор шашек.

5. Задача с шестью спичками. Профессор Люциус С. Вильсан — блестящий, хотя и несколько эксцентричный тополог. Ранее он носил фамилию Вильсон. Еще аспирантом он заметил, что если его полное имя WILSON напечатано заглавными буквами, то все они топологически эквивалентны, кроме буквы О. Вильсона это так раздражало, что он обратился за разрешением сменить фамилию на WILSUN.

Встретившись с ним недавно за ленчем, я увидел, что Вильсан складывает на скатерти какие-то фигуры из шести спичек.

— Новая топологическая головоломка? — с надеждой спросил я.

— Как вам сказать, — ответил Вильсан. — Я пытаюсь определить, сколько топологически различных плоских фигур можно сложить из шести спичек, если не класть их одну на другую, а соединять только концами.

— Наверное, это нетрудно, — сказал я.

— Потруднее, чем вам кажется. Я только что сложил все возможные фигуры из меньшего числа спичек, — и он протянул мне конверт, на обратной стороне которого была изображена таблица, приведенная на рис. 70.

— А вы не пропустили одну фигуру из пяти спичек? — заметил я. — Посмотрите-ка на среднюю — квадрат с хвостом. Предположим, что хвост находится внутри квадрата. Очевидно, что эти фигуры нельзя перевести одну в другую деформацией, не выводя спички из плоскости.

Вильсан отрицательно покачал головой.

— Это очень распространенное заблуждение, основанное на неправильном понимании топологической эквивалентности.

Если две фигуры можно перевести одну в другую, растягивая их, но не ломая и не делая разрывов (как говорят топологи, непрерывной деформацией), то они

топологически эквивалентны (или, если опять воспользоваться топологическим термином, гомеоморфны). Обратное же неверно: если какие-то две фигуры гомеоморфны, то их не всегда можно перевести одну в другую непрерывной деформацией.

— Прошу прощения,— сказал я.

— Не стоит. Две фигуры гомеоморфны, если, обводя непрерывным движением (не отрывая карандаша от бумаги) одну из них, вы можете одновременно обводить другую, разумеется при условии, что между точками фигур имеется взаимно-однозначное соответствие и

Число спичек	*Число топологически различных (неэквивалентных) фигур*
1	1
2	1
3	3
4	5
5	10
6	?

Рис. 70. **Таблица топологически не эквивалентных фигур, составленных из 1, 2, ..., 6 спичек.**

в каждый момент времени острия ваших карандашей будут находиться в «соответствующих» друг другу точках. Например, веревка, концы которой соединены так, что она образует кольцо, гомеоморфна веревке, которую перед тем, как соединять ее концы, завязали в узел, хотя перевести с помощью непрерывной деформации кольцо с узлом в кольцо без узла, очевидно, нельзя. Две сферы, касающиеся друг друга извне, гомеоморфны двум вложенным друг в друга сферам разной величины, также имеющим точку касания.

Наверное, у меня был очень озадаченный вид, потому что Вильсан поспешно добавил:

— Взгляните, вот наглядный пример, который будет понятен вашим читателям. Фигуры из спичек выложены на плоскости, но представьте себе, что они сделаны из эластичных лент. Их можно выводить из плоскости, как угодно деформировать, выворачивать наизнанку и снова класть на плоскость. Если таким путем вам удастся превратить одну фигуру в какую-нибудь другую, то обе фигуры следует считать топологически эквивалентными.

— Понятно, — согласился я. — Погрузив фигуру в пространство высшей размерности, ее можно с помощью деформации перевести в другую, топологически ей эквивалентную.

— Совершенно верно. Представьте себе, что бесконечная веревка или две сферы, о которых мы говорили, погружены в четырехмерное пространство. Тогда канат можно завязывать и развязывать, не разъединяя его концов, а меньшую сферу можно вкладывать в большую и беспрепятственно извлекать ее оттуда.

Вычислите, сколько топологически не эквивалентных фигур, составленных из шести спичек, можно построить на плоскости, если топологическую эквивалентность понимать так, как ее понимает профессор Вильсан. Все спички жесткие и имеют одинаковую длину. Их нельзя ни сгибать, ни растягивать, соприкасаться они могут только концами и не должны даже частично накрывать друг друга. Однако уже готовую фигуру можно растягивать, поднимать над плоскостью, деформировать в трехмерном пространстве и снова возвращать в плоскость. При этом вершины, образованные двумя спичками, могут перестать быть вершинами. Иначе говоря, мы не отличаем треугольник от квадрата или пятиуголь-

ника, цепочка из двух спичек эквивалентна цепочке любой длины, все прописные буквы E, F, T и Y эквивалентны друг другу, буква R эквивалентна своему зеркальному отражению и т. д.

6. Две шахматные задачи. Известно немало красивых шахматных задач, в которых доска и фигуры нужны лишь для того, чтобы с их помощью поставить какую-нибудь хитроумную математическую задачу. Вот две классические задачи этого рода, явно близкие друг другу по духу.

1. *Задача о минимальном числе полей, находящихся под угрозой.* Восемь фигур одного цвета (король, ферзь, два слона, два коня и две ладьи) надо расставить на доске так, чтобы под угрозой нападения находилось минимальное число клеток. Фигура не может ходить лишь на то поле, на котором она стоит; все остальные ходы, в том числе и на занятые клетки, разрешены. Два слона вовсе не обязательно должны занимать квадраты разного цвета. На рис. 71 под угрозой нападения находятся двадцать две заштрихованные клетки, но это число можно еще существенно уменьшить.

2. *Задача о максимальном числе полей, находящихся под угрозой.* Те же самые восемь фигур надо расставить так, чтобы под угрозой нападения было максимально возможное число клеток. Как и в предыдущей задаче, фигура может делать ход на любую занятую клетку, кроме своей собственной, а слоны не обязательно должны стоять на квадратах разного цвета. Пятьдесят пять заштрихованных квадратов на рис. 72 находятся под угрозой, но этому числу еще далеко до максимума.

Если слоны занимают клетки разного цвета, то существует решение второй задачи, для которого можно доказать, что оно составляет максимум. Если же слоны стоят на клетках одного цвета, то доказать оптимальность полученных решений не удается.

Минимальное число клеток в первой задаче, по-видимому, не зависит от того, на каких клетках — одного или разных цветов — стоят слоны, но ни в том, ни в другом случае не доказано, что в найденных решениях действительно достигается минимум. Над этими задачами

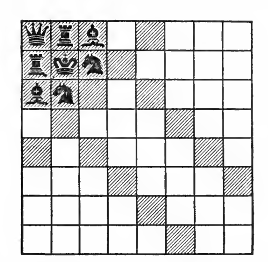


Рис. 71. Задача о восьми фигурах, угрожающих минимальному числу клеток шахматиой доски.

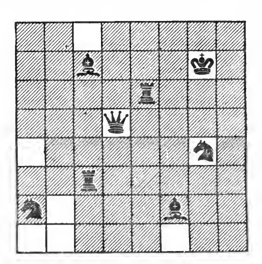


Рис. 72. Задача о восьми фигурах, угрожающих максимальиому числу клеток шахматиой доски.

трудилось столько специалистов, что в придуманные ими решения вряд ли удастся внести какие-либо изменения. Если же кому-нибудь удастся найти новое решение, то такое открытие вызовет большой интерес у любителей шахмат.

7. Сколько миль проехали мистер и миссис Смит? Однажды мистер Смит и его жена выехали в 10 часов утра из своего дома, расположенного в штате Коннектикут, и отправились к родителям миссис Смит в штат Пенсильвания. По дороге Смиты собирались остановиться только один раз, в Вестчестере, чтобы позавтракать в ресторане «При свете свечей», принадлежащем Патриции Мерфи.

Предстоящий визит к родственникам жены и неприятности по работе повергли мистера Смита в мрачное настроение. Лишь в 11 часов утра миссис Смит отважилась, наконец, спросить его: «Где мы сейчас находимся, дорогой?» Мистер Смит взглянул на спидометр и огрызнулся: «Мы проехали ровно половину расстояния отсюда до ресторана». К ресторану они подъехали в полдень, не торопясь позавтракали и двинулись дальше. Лишь в пять часов вечера, когда они уже проехали 200 миль от того места, где миссис Смит задала первый вопрос, она спросила второй раз: «Сколько нам еще ехать, дорогой?» «Еще половину расстояния, — пробурчал Смит, — которое мы уже проехали от ресторана».

К месту назначения они прибыли в тот же день в 7 часов вечера. Из-за дорожных условий мистеру Смиту пришлось вести машину с различной скоростью. Тем не менее определить точное расстояние между домами в Коннектикуте и в Пенсильвании (а в этом и заключается задача) совсем несложно.

8. На каком пальце закончится счет? 1 января 1972 года один математик был очень удивлен, увидев, что его дочь как-то странно считает на пальцах левой руки. Девочка начала счет с большого пальца и назвала его первым, указательный палец она назвала вторым, средний — третьим, безымянный — четвертым, мизинец — пятым. Дойдя до мизинца, девочка продолжала счет в обратном направлении. Безымянный палец она

назвала шестым, средиий — седьмым, указательный — восьмым, большой — девятым. Дойдя до большого пальца, оиа сиова повернула, после чего указательный палец стал десятым, средний — одиннадцатым и т. д. Так оиа считала до тех пор, пока не дошла до двадцати (двадцатым оказался безымянный палец).

«Что это ты делаешь?» — поинтересовался отец.

Девочка топнула иогой. «Ну вот, из-за тебя я сбнлась со счета. Теперь опять придется начииать все сначала. Мне хочется досчнтать до 1972, чтобы посмотреть, на каком пальце я остановлюсь».

Математнк закрыл глаза и пронзвел в уме иесложные выкладкн. «Ты остановишься на ...», и ои назвал тот палец, иа который, по его мнеиию, прнходилось число 1972.

Закончнв счет н убеднвшнсь в том, что отец был прав, девочка настолько уверовала в чудесную снлу математики, что решила с этого дня вдвое усердиее заниматься арифметикой.

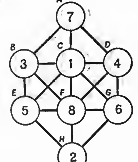
Как решал эту задачу отец девочки н что у него получилось?

ОТВЕТЫ

1. Если цифры от 1 до 8 разместить в кружках так, как показано на рис. 73, то ннкакие два чнсла, различающиеся иа единицу, не будут соедннены друг с другом отрезком прямой. Прнведеиное решенне едннственно (еслн ие счнтать решений, получающнхся из него прн поворотах и отражеииях в зеркале).

Задача может быть решена следующим образом. Каждый члеи последовательиостн 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, кроме первого (1) и последнего (8), нмеет соседей слева и справа. На схеме, изображеиной на рнс. 69, кружок, обозначенный буквой C, соеднняется со всеми кружкамн, кроме кружка H. Поэтому если в кружке C стонт одна из цнфр от 2 до 7, то в кружке H должны будут стоять сразу две цифры, одна из которых иа единнцу меньше, а вторая — иа едииицу больше, чем цифра, стоящая в C. Поскольку это иевозможио, то в кружок C надо впнсать цифру 1 или 8. Те же самые рассуждення отиосятся к кружку F. Симметрня схемы позволяет поместнть цифру 1 в кружок либо C, либо F. Впишем ее в C. Тогда

Рис. 73. **Решение задачи о расстановке цифр.**



цифру 2 можно будет вписать только в кружок *H*. Аналогично, вписав в кружок *F* цифру *8*, мы сможем вписать цифру *7* только в кружок *A*. Оставшиеся четыре кружка заполнить уже легко.

Остроумно и такое решение. Попробуйте начертить новую схему, на которой отрезками прямых соедините все кружки, не соединенные «прямой связью» на исходной схеме. Это позволит упростить формулировку задачи и свести ее к следующей: в кружки на новой схеме требуется вписать цифры от 1 до 8 так, чтобы их можно было обойти в порядке возрастания (маршрут должен быть связным, то есть не распадаться на отдельные отрезки). Рассмотрев новую схему, нетрудно понять, что цифры можно расставить лишь четырьмя способами. Все они получаются из одного-единственного решения при поворотах и отражениях.

Один из читателей сообщил мне, что впервые узнал об этой задаче от своего «приятеля со студии Уолта Диснея, сотрудники которой убили массу времени на ее решение». Сам читатель в телевизионной передаче «Как работает цифровая вычислительная машина?» на примере этой головоломки показал, как ее будет решать математик и чем его подход отличается от «подхода» вычислительной машины, которая, идя «напролом», просто перебирает все перестановки из восьми цифр (а их в данном случае будет 40 320).

2. Эта головоломка представляет собой замаскированный вариант знаменитой задачи о шарах и урнах. Ее подробное решение дал великий французский математик Пьер Симон Лаплас. *Ответ*: с вероятностью $^9/_{10}$ юноша, открыв дверь в третий раз, обнаружит за ней девушку. Пара дверей, за которыми скрываются два тигра, исключается условием, согласно которому

юноша и в первый и во второй раз открывал двери, за которыми находились девушки. Следовательно, мы получаем серию из 10 равновероятных исходов испытаний (каждое испытание — открывание трех дверей). Если за двумя выбранными юношей дверями скрываются две девушки (девушку, стоящую за левой дверью, обозначим Д1, девушку, стоящую за правой дверью, — Д2), то возможны следующие исходы:

Д1—Д1—Д1
Д1—Д1—Д2
Д1—Д2—Д1
Д1—Д2—Д2
Д2—Д1—Д1
Д2—Д1—Д2
Д2—Д2—Д1
Д2—Д2—Д2

Если же за двумя выбранными дверями окажутся девушка и тигр, то возможны лишь два исхода (Т означает здесь «тигр»):

Д—Д—Д
Д—Д—Т

Из 10 возможных случаев, образующих «пространство элементарных событий» рассматриваемой задачи, роковым для юноши оказывается лишь один.

Следовательно, вероятность того, что подсудимый останется в живых, равна $^9/_{10}$.

3. Подходы к решению этой задачи могут быть самыми различными. Известны алгебраический и графический способы ее решения, а также подход, основанный на остроумном использовании двоичной системы. Я приведу самое короткое из известных мне решений.

Девушка, которой принадлежит первая подача, подает в пяти играх, а ее партнерша — в четырех. Пусть первая девушка одержала победу в x играх из тех пяти, в которых она подавала, и в y играх из остальных четырех. Тогда общее число игр, в которых подающая потерпела поражение, равно $5 - x + y$ ($5 - x$ игр проигрывает со своей подачи первая девушка и y игр — вторая). По условию задачи это число равно 5 (в пяти играх победу одерживает та из девушек, которая в них не подает). Следовательно, $x = y$ и та из девушек, которая

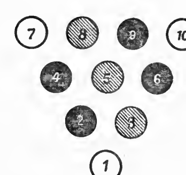


Рис. 74. Доказательство неразрешимости задачи о кеглях.

подавала в первой игре, побеждает в $2x$ играх. Поскольку в четном числе игр могла победить лишь Миранда, первая подача принадлежала ей.

4. Какие бы десять кеглей из двадцати кеглей двух разных цветов мы ни выбрали, выстроив их в виде треугольника, мы всегда обнаружим, что какие-то три кегли одного цвета расположились в вершинах равностороннего треугольника. Доказать это утверждение можно по-разному. Вот, например, одно из доказательств.

Предположим, что у нас есть светлые и темные кегли, причем кегля *5* (рис. 74) светлая. Кегли *4*, *9*, *3* стоят в вершинах равностороннего треугольника, поэтому хотя бы одна из них должна быть светлой. Но вследствие симметрии фигуры светлой может быть любая из них, например кегля *3*. Тогда кегли *2* и *6* должны быть темного цвета, кегли *2*, *6*, *8* также расположены в вершинах равностороннего треугольника, следовательно, кегля *8* может быть только светлой, но тогда кегли *4* и *9* — заведомо темного цвета. Кегля *10* никак не может быть темной, потому что вместе с темными кеглями *6* и *9* она образует три вершины равностороннего треугольника. Однако она не может быть и светлой, потому что тогда были бы светлыми все три кегли — *10*, *3*, *8*, также расположенные в вершинах равностороннего треугольника. Следовательно, кегля *5*, с которой мы начали, не может быть светлой. Разумеется, мы придем к противоречию и в том случае, если предположим, что кегля *5* темного цвета.

5. Из шести спичек можно построить на плоскости девятнадцать топологически различных фигур, в которых спички не накладываются друг на друга и соприкасаются только концами. Эти девятнадцать фигур

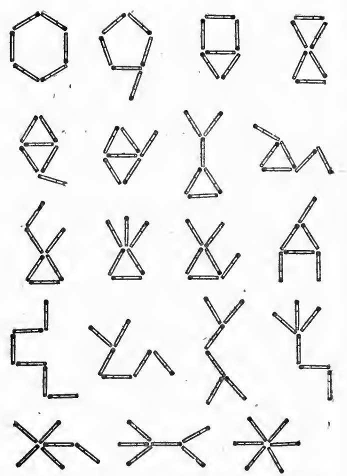


Рис. 75. Двенадцать топологически не эквивалентных фигур, которые можно построить из 6 спичек.

изображены на рис. 75. Если считать, что фигуры могут быть не только плоскими, но и трехмерными, то получится всего лишь одна дополнительная фигура: остов тетраэдра.

Читатели сообщили мне, что из семи спичек на плоскости можно построить тридцать девять топологически неэквивалентных фигур.

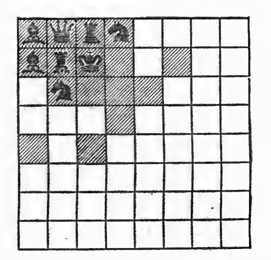


Рис. 76. Решение задачи о расстановке фигур, угрожающих минимальному числу клеток.

6. На рис. 76 показано, как надо расставить шахматные фигуры одного цвета, чтобы они угрожали всего лишь шестнадцати клеткам шахматной доски.

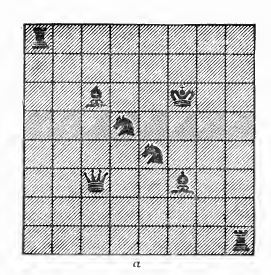
Поменяв местами ферзя и слона, стоящего в левом верхнем углу, вы получите те же шестнадцать клеток, но слоны тогда уже будут стоять на клетках одного цвета. По-видимому, независимо от того, стоят ли слоны на одном или на разных полях, число клеток, которым угрожают восемь фигур, не может быть меньше шестнадцати.

Изображенная на рис. 76 позиция одновременно является решением еще двух задач с теми же восемью шахматными фигурами:

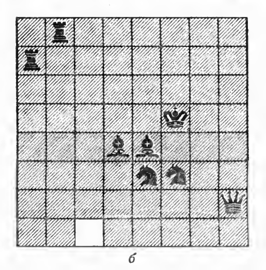
1) расставить фигуры так, чтобы число возможных ходов было минимальным (на рисунке оно равно десяти);

2) найти позицию, в которой может двигаться минимальное число фигур.

На рис. 77, *а* приведена позиция, в которой расставленные фигуры угрожают всем 64 клеткам доски. Очевидно, что это и есть максимум. Если слоны стоят на разных полях, то расставленные фигуры могут угрожать,



а



б

Рис. 77. Решение задачи о расстановке фигур, угрожающих максимальиому числу клетоr

а — слоны стоят на клетках одного цвета; *б* — слоны стоят на клетках разных цветов.

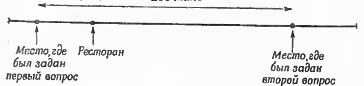


Рис. 78. График к решению задачи о поездке Смитов.

по-видимому, не более чем 63 клеткам. Одно из многочисленных решений показано на рис. 77, *б*. Точное число различных решений неизвестно.

Задачу о расстановке 8 фигур, угрожающих максимальному числу клеток, для случая, когда слоны стоят на разных полях, впервые предложил Дж. Клинг в 1849 году. В задаче Клинга имелось еще одно, дополнительное условие: король должен был стоять на единственном безопасном квадрате.

Попытайтесь решить, во-первых, задачу Клинга в ее первоначальном варианте и, во-вторых, в другом (необычайно трудном) варианте, когда безопасная клетка должна находиться в углу доски. Двое читателей прислали одинаковые решения этой задачи, но единственный безопасный квадрат в этих решениях был занят ладьей. Доказано, что безопасным может быть любое поле.

7. Различные ссылки на время, которые приводились в условии задачи, никакого значения не имеют, потому что Смит все время ехал с разной скоростью.

За всю поездку миссис Смит задала два вопроса.

Из ответов Смита следует, что, когда миссис Смит задала первый вопрос, они успели проехать одну треть расстояния от дома до ресторана, а когда она задала второй вопрос, им осталось проехать треть пути от ресторана до конечного пункта. Отсюда ясно, что расстояние между точками, в которых миссис Смит задавала свои вопросы (по условию это 200 миль), составляет две трети всего пути. Следовательно, полный путь составлял 300 миль. Посмотрите на рис. 78, и вам сразу это станет понятно.

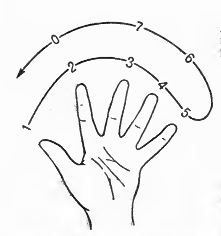


Рис. 79. Как девочка перенумеровала пальцы своей левой руки.

8. Когда дочка математика считала на пальцах до 1972, последнее число у нее пришлось на безымянный палец. Через каждые восемь пальцев она опять возвращалась к большому (рис. 79). Воспользовавшись понятием сравиеиия (по модулю 8), нетрудно вычислить, на кэкой палец придется любое наперед заданиое число. Нужно лишь разделить это число на 8, записать остаток, а затем посмотреть, какому пальцу на схеме этот остаток соответствует.

При делении 1972 на 8 в остатке получается 4. Поэтому счет закончится на безымянном пальце.

Производя в уме деление, математик воспользовался признаком делимости (любое число делится на 8 без остатка, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8 без остатка) и делил на 8 не 1972, а лишь 972. Остаток оказался равным 4.

ГЛАВА 14

САМОДЕЛЬНАЯ САМООБУЧАЮЩАЯСЯ МАШИНА ИЗ СПИЧЕЧНЫХ КОРОБКОВ

«На шахматной доске оставалось мало фигур, и даже мне, совсем не шахматисту, сразу стало ясно, что игра подходит к концу... Лицо его (Моксона) было мерт-

венно бледно, глаза сверкали как алмазы. Второго игрока я видел только со спины, но и этого было достаточно, чтобы у меня пропала всякая охота видеть его лицо» *.

Приведенный отрывок взят из классического рассказа Амброза Бирса «Хозяин Моксона». Изобретатель Моксон построил робота, играющего в шахматы. После того как Моксон выиграл одну партию, робот задушил своего создателя.

В рассказе Бирса отражена все нарастающая тревога людей: неужели когда-нибудь машины выйдут из повиновения и начнут делать, что им заблагорассудится? Не думайте, что подобные опасения высказывают лишь те, кто не разбирается в вычислительных машинах. Норберт Винер перед своей смертью с ужасом ждал дня, когда важные правительственные решения будут приниматься машинами, запрограммированными с учетом последних достижений теории игр. Винер предостерегал, что машины могут вовлечь человечество в самоубийственную войну.

Наибольшие опасения вызывают самообучающиеся машины (то есть машины, совершенствующиеся по мере накопления опыта), потому что их поведение становится непредсказуемым. Такие машины делают не то, что им приказывают, а то, чему они научились. Они довольно быстро достигают уровня, когда программист уже больше не может сказать, какие изменения произошли в схеме машины. Большинство самообучающихся машин обычно содержит так называемые «рандомизирующие устройства». Если действие такого устройства основано на случайном распаде радиоактивного образца, то поведение машины даже в принципе непредсказуемо (так, во всяком случае, считает большинство физиков).

Бо́льшая часть современных исследований направлена на совершенствование самообучающихся машин, «умеющих» играть в различные игры. Некоторые из этих работ строго засекречены: в них под «игрой» понимается война. Одной из первых самообучающихся машин была IBM 704. Программу для нее составил Артур Л. Сэмюел.

* А. Бирс, Хозяин Моксона, сб. «Словарь Сатаны и другие рассказы», М., изд-во «Художественная литература», 1966.

В 1959 году Сэмюел создал программу, которая позволяла машине не только правильно играть в шашки, но и улучшать стратегию игры, используя опыт, накопленный в предыдущих партиях. Вначале Самюел с легкостью обыгрывал машину, но IBM 704 не стала душить своего программиста, а вместо этого начала быстро совершенствоваться. Вскоре она достигла такого уровня, что с блеском выигрывала у Сэмюела все партии подряд! Насколько мне известно, такая программа для игры в шахматы еще не создана. Существует только несколько остроумных шахматных программ для обычных (несамообучающихся) машин.

Лет 10 назад советский гроссмейстер Михаил Ботвинник заявил, что придет день, когда машина научится играть не хуже гроссмейстера. «Это, конечно, чепуха», — отреагировал на выступление Ботвинника американский эксперт по шахматам Эдвард Ласкер. Но чепухой скорее следовало назвать замечание Ласкера. Играя в шахматы, машина имеет три огромных преимущества перед противником — человеком: 1) она никогда не «зевает»; 2) может анализировать ходы значительно быстрее человека; 3) способна безгранично совершенствовать свое мастерство. Поэтому есть все основания надеяться, что, сыграв несколько тысяч партий с шахматистами высокого класса, машина достигнет уровня гроссмейстера. Возможен и такой вариант: шахматная программа будет составлена так, что машина станет непрерывно и исступленно играть сама с собой. Благодаря своему быстродействию она за короткое время сможет накопить опыт, намного превосходящий опыт любого шахматиста-человека.

Для экспериментов с самообучающимися машинами, умеющими играть в различные игры, совсем не обязательно покупать электронную вычислительную машину (ЭВМ). Нужно лишь набрать побольше пустых спичечных коробок и разноцветных бусинок.

Счастливая идея создания простой и надежной самообучающейся машины из спичечных коробков принадлежит Дональду Мичи.

В статье «Метод проб и ошибок» * Мичи описывает самообучающуюся машину для игры в крестики и

* *Penguin Science Survey*, 2, 1961.

иолики, которую можио собрать из трехсот спичечных коробков. Называется эта машина MENACE *.

MENACE работает очень просто. На каждом коробке нарисоваиа какая-нибудь позиция, встречающаяся при игре в крестики и нолики. Первый ход (а следовательно, и все иечетиые) всегда делает машииа, поэтому иа коробках достаточио написать лишь те позиции, которые возиикают перед иечетными ходами. Виутри каждого коробка лежат разиоцветиые стеклянные бусиики небольшого диаметра (каждый цвет соответствует одиому из возможных ходов машииы).

Виутрь каждого коробка вклеен картоний уголок. При встряхивании и переворачиваиии коробка бусинки закатываются в картонный «загон». Цвет бусиики, попавшей в вершину уголка, случаен. В коробках, отиосящихся к первому ходу, лежит по четыре бусиики каждого цвета, в коробках третьего хода — по три, в коробках пятого хода — по две бусинки каждого цвета и, наконец, в коробках седьмого хода каждый цвет представлен лишь одиой бусиикой.

Чтобы узнать очередиой ход машииы, иадо встряхнуть и перевернуть коробок, затем открыть его и посмотреть, какого цвета «вершиниая» бусинка, то есть бусиика, закатившаяся в вершину картоииого уголка коробка; «приивявшие участие» в игре коробки остаются открытыми до коица партии. Если машииа выигрывает, ее поощряют, добавляя в каждый открытый коробок по три бусиики того же цвета, что и «вершиниая» бусиика. Если игра закаичивается виичью, в каждый коробок добавляют только по одиой бусиике (того же цвета, что и «вершиииая»). Если же машииа проигрывает, ее «наказывают», выиимая из каждого коробка бусиику, закатившуюся в вершиину уголка. Такой метод киута и пряника иаходит весьма близкие параллели в обучении животиых и даже людей. Чем больше партий в крестики и иолики играет машииа Мичи, тем лучше она «запомииает» выигрышиые ходы и тем упориее стремится избегать проигрышиых. Это и озиачает, что она представляет собой хотя и очень простое, ио все же

* Mathbox Educable Naughts and Crosses Engine — машнна нз спнчечных коробков, умеющая играть в крестнкн н нолнки; menace (*англ.*) — угроза, опасность.

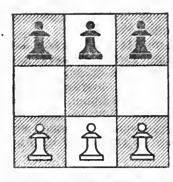


Рис. 80. Игра в шесть пешек.

самообучающееся устройство. Правда, в отличие от IBM 704, работающей по шахматной программе Сэмюела, наша «спичечная» машина не умеет анализировать сыгранные партии и разрабатывать новые «стратегические замыслы» в соответствии с накопленным опытом.

Первый двухдневный турнир между Мичи и его машиной состоял из 220 партий. Сначала Мичи все время наказывал свое детище за плохую игру, но после семнадцати партий машина начала ставить первый крестик только в угловую клетку, а после двадцатой партии заканчивать все игры вничью. В надежде заманить противника в ловушку Мичи начал делать самые бессмысленные ходы. Такая тактика оправдывала себя лишь до тех пор, пока машина не научилась справляться и с этими хитростями. Закончился матч сокрушительным поражением Мичи: он выбыл из турнира, проиграв восемь партий из десяти. Самообучающаяся машина из спичечных коробков стала гроссмейстером крестиков и ноликов!

Поскольку вряд ли кто-нибудь из читателей возьмется за изготовление самообучающейся машины из трехсот спичечных коробков, я придумал игру попроще. Чтобы построить играющую в нее машину, достаточно взять всего лишь двадцать четыре коробка. Теория игры в шесть пешек (так я назвал свою игру) совершенно тривиальна, тем не менее я убедительно прошу читателя не проводить никакого анализа. Построив машину и постигнув все тонкости «шестипешия» в процессе обучения ее игре, вы получите гораздо больше удовольствия.

В шесть пешек играют на доске размером 3×3 клетки. Каждый из игроков имеет по 3 пешки. Начальная позиция показана на рис. 80. Вместо «настоящих» пешек с тем же успехом можно воспользоваться монетками двух различных достоинств или фишками. Ходы разрешается

делать лншь двух типов: 1) пешка может передвинуться на одиу клетку вперед, если эта клетка пуста; 2) пешка может взять пешку другого цвета, стоящую справа или слева на соседней клетке и по диагонали, и остаться на освободившейся клетке.

Взятая пешка снимается с доскн. Ходы пешек, как видно из этих правил, в основном совпадают с ходами пешек в обычных шахматах. Однако в отлнчие от шахмат нашим пешкам не разрешается делать двойной ход в начале партии, брать пешку противиика на проходе и превращаться в какие-либо другие фнгуры того же цвета.

Партня считается выиграниой в следующих трех случаях:

1) когда одну из пешек удается провести в третий ряд;

2) когда взяты все пешки противиика;

3) когда противник не может сделать очередного хода.

Играющие делают ходы по очереди, передвигая каждый раз по одной пешке. Очевидио, что закончиться вничью игра не может; далеко ие так очевидно, какой из игроков имеет пренмущество: делающий второй ход илн тот, кто начинает игру.

Для изготовления машииы САМА (САмообучающаяся Машииа с Адаптацней) нужно взять двадцать четыре пустых спнчечных коробка н много разноцветных бусинок. Вместо бусинок можно взять разноцветные леденцы илн раскрашенные горошины. На каждый коробок наклейте рисунок одной из позицнй, встречающихся при игре в шесть пешек (оии показаны на рис. 81). В каждой партии робот должен делать ход вторым. Диаграммы, обозначенные цнфрой *2*, изображают две позицнн, которые могут возннкнуть перед вторым ходом. Делая первый ход, вы можете передвинуть либо среднюю пешку, либо одну из крайних. Мы будем рассматривать только те случаи, когда из двух крайиих игру начинает левая пешка, потому что, начав игру правой пешкой, вы получите зеркально-снмметрнчную последовательиость ходов. Днаграммы, обозначенные цифрой *4*, представляют собой одиннадцать позиций, с которыми может столкиуться ваш робот перед своим вторым (четвертым после начала игры) ходом. Цифрой *6* обозначены одиниадцать возможиых позиций перед последним

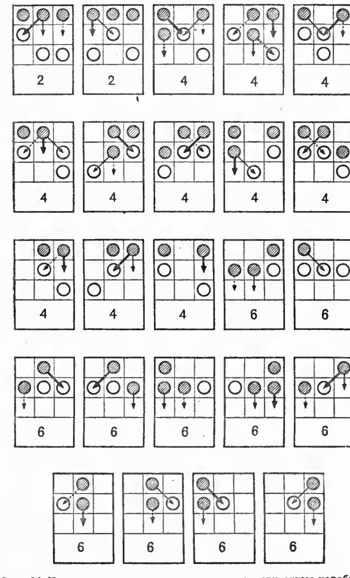


Рис. 81. Картинки, которые нужно наклеить на спичечные коробки—элементы самообучающейся машины САМА (четыре типа стрелок означают стрелки четырех различных цветов).

ходом робота (шестым после начала игры). (На рисунках изображены все возможные позиции, в том числе и зеркально-симметричные. Я это сделал просто для того, чтобы читателю было легче обращаться с машиной. В действительности же достаточно девятнадцати коробков).

В каждый коробок положите столько бусинок, сколько стрелок на диаграмме. Каждой стрелке должна отвечать бусинка определенного цвета. Теперь робот готов к игре.

Каждая стрелка обозначает допустимый, то есть согласующийся с правилами игры, ход. На диаграммах изображены все допустимые ходы. Отсюда следует, что машина, во-первых, будет ходить только «по правилам» и, во-вторых, сможет сделать любой разрешенный ход. Однако никакой определенной стратегии у нашего робота нет и пока он еще ничего не умеет.

Обучение происходит следующим образом. Сделав первый ход, вы берете коробок, на котором нарисована создавшаяся на доске позиция, встряхиваете его и, закрыв глаза, отодвигаете крышку. Вынув из коробка наугад одну бусинку, вы закрываете его, ставите на стол, а сверху кладете вынутую бусинку. Теперь откройте глаза, посмотрите, какого цвета бусинка, и, найдя на диаграмме соответствующую стрелку, сделайте указанный ею ход. После этого вы делаете свой очередной ход (предыдущий был ходом машины). Сделав его, повторите описанную процедуру. Так следует продолжать до тех пор, пока партия не закончится. Если выиграет робот, положите все вынутые бусинки на место и начните следующую партию. Если же робот проиграет, его надо наказать. Заберите у него одну бусинку, соответствующую его последнему ходу. Все остальные бусинки положите на место и продолжайте курс обучения — начните следующую игру. Если последний коробок окажется пустым (так иногда бывает), это означает, что все ходы машины приводят к ее проигрышу и она отказывается играть дальше. В этом случае бусинку надо вынуть из предпоследнего коробка.

В первых пятидесяти партиях записывайте все победы и поражения робота, а потом составьте график. На рис. 82 показаны типичные результаты такого турнира. Из диаграммы видно, что, сыграв тридцать шесть

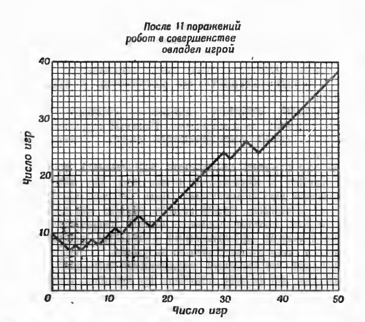


Рис. 82. График обучения машины САМА в первых пятидесяти играх (участок ломаной с наклоном вниз означает поражение, участок с наклоном вверх — победу).

партий (и проиграв из них одиннадцать), робот стал очень сильным противником. Система наказаний придумана специально для того, чтобы максимально сократить время обучения, однако это время существенно зависит от мастерства учителя. Машина учится играть тем быстрее, чем искуснее ее противник.

Можно придумать и другую систему обучеиия. Пусть, например, вам хочется, чтобы робот одерживал максимальное число побед в каждых двадцати пяти играх. Тогда лучше всего поощрять его (рáвно как и иаказывать), добавляя в каждый коробок бусинки иужного цвета. При таком способе непрáвильиые ходы ликвидируются несколько медлеииее, ио зато машина делает их все реже. Интересио было бы соорудить еще одну машину, которая вначале тоже не умеет играть, и обучить ее по второй системе. Этот робот можно назвать САМ (САмообучающаяся Машииа). Увеличив число элемен-

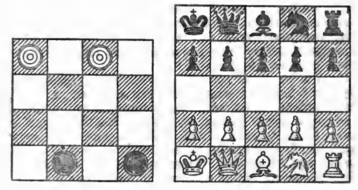


Рис. 83. Доски для игры в минишашки (*слева*) и в минишахматы (*справа*).

тов — спичечных коробков — в той и в другой машине, их можно было бы научить делать не только четные, но и нечетные ходы, и в частности первый ход. Затем можно было бы устроить турнир из шестидесяти партий между машинами и посмотреть, какая из машин — САМ или САМА — одержит больше побед. Первый ход в каждой партии роботы делают по очереди. Аналогичные машины нетрудно придумать и для других игр. Например, Стьюарт К. Хайт недавно сконструировал из спичечных коробков робота NIMBLE (NIM Box Logic Engine — логическое устройство из коробков для игры в ним), обучающегося игре в ним по схеме 3—3—3 (фишки разделены на три кучки, по три фишки в каждой). Робот Хайта может делать как первый, так и второй ход; после каждой партии его либо поощряют, либо наказывают. NIMBLE состоит всего из восемнадцати спичечных коробков; после тридцати партий он уже почти непобедим. Игра нами подробно разобрана в главе 14 моей первой книги.

Многие популярные игры настолько упрощаются при уменьшении размеров доски, что оказываются в пределах возможностей спичечных роботов. Так, в го еще можно играть на доске размером 2×2. Наименьшая доска для шашек, на которой игра еще не становится тривиальной, изображена на рис. 83 слева. Построить из спичечных коробков машину для игры в такие «минишашки» совсем нетрудно; если вам не захочется этого

делать, займитесь анализом игры. Попробуйте ответить на вопрос: должна ли партия в минишашки непременно заканчиваться вничью или же один из игроков всегда одерживает победу (предполагается, что оба противника играют наилучшим образом)?

Игра в шахматы остается далеко за пределами возможностей любой самообучающейся машины из спичечных коробков, даже если мы максимально уменьшим шахматную доску (следя, однако, за тем, чтобы на ней можно было сделать любой ход, разрешенный правилами; доска, удовлетворяющая этому условию, изображена на рис. 83 справа). Определить, имеет ли хоть один игрок преимущество, и если да, то какой, по-видимому, невозможно. Минишахматы могут помочь в составлении упрощенной шахматной программы для самообучающейся электронно-вычислительной машины. Полезны они и тем, кто захочет сыграть в шахматы во время небольшого перерыва в работе.

Многие читатели сообщили мне о своих экспериментах с самообучающимися машинами из спичечных коробков. Один из них демонстрировал машину САМА на студенческом карнавале. Обучение робота проводилось по второй системе, то есть бусинки только добавлялись, поэтому его противники всегда имели (правда, непрерывно уменьшающиеся) шансы на выигрыш. Победителям выдавались призы, ценность которых увеличивалась по мере того, как возрастало мастерство машины.

Некоторые читатели построили по моему совету две машины и организовали между ними турнир. Один читатель назвал такую пару роботов ОНИ (Обучающиеся Неодинаково Инструктируемые машины). Машины играли между собой до тех пор, пока одна из них не начала выигрывать все партии подряд. Другой читатель назвал вторую машину RAT* (Retless Auto-learning Tyrant — безжалостный самообучающийся тиран). Он сообщил, что после восемнадцати партий RAT сдался, признав победу во всех последующих партиях за САМА.

Автор одного из писем назвал машины Марк-1 и Марк-2. Как и следовало ожидать, Марку-1 понадобилось восемнадцать партий, чтобы научиться одерживать победу в каждой игре, а Марк-2 за это время научился

* Rat (*англ.*) — крыса. — *Прим. перев.*

как можно дольше оттягивать свое поражение. Автор письма разработал дьявольский план. Пригласив юношу и девушку из студенческого математического кружка, не знакомых с игрой в шесть пешек, он дал им прочесть правила игры и устроил между ними турнир. Цитирую его письмо:

«Каждый участник турнира сидел в отдельной комнате, называя свои ходы судье. По секрету от игроков судьи (их тоже было двое) сообщали о сделанных ходах в третью комнату, где находились «машины» и велся счет побед и поражений. Противники считали, что они играют друг с другом через посредников; на самом же деле каждый из них играл с машиной. Начиная новую партию, участники менялись фигурами (игравший белыми брал черные, и наоборот). Те, кто находился в средней комнате, тоже были заняты: им приходилось следить, чтобы ходы не были перепутаны, встряхивать и открывать коробки («обслуживать машины») и вести счет матча.

Студентов просили комментировать по ходу игры свои ходы и ходы противника. Вот некоторые из этих комментариев.

«Самый безопасный ход, который только можно сделать, чтобы противник не взял мою пешку. Я почти наверняка выиграю».

«Он взял пешку у меня, но и я не остался в долгу и взял его пешку. Если он пойдет так, как я думаю, то я потеряю одну пешку, зато на следующем ходу смогу запереть все его фигуры».

«Какой же я болван!»

«Великолепный ход! Думаю, что я проиграю эту партию».

«По-моему, он совсем не думает. Мог бы теперь уже н не зевать».

«Здорово играет! Она начинает понимать, чего я хочу».

«Наконец-то он стал думать, и играть стало куда интересней».

«Какой странный ход! Разве не видит, что я выиграю, если он пойдет вперед?»

«Мой противник играл хорошо, но, по-моему, я первой раскусила игру».

«Первым раскусил игру я».

Когда участникам соревнования показали «машины», с которыми они играли, студенты никак не могли поверить, что их противниками были не люди.

Математики из Массачусетского технологического института составили программу для обучения машины IBM 1620 игре в восемь пешек. Игра в восемь пешек — один из вариантов игры в шесть пешек (играют по тем же правилам, но на «минидоске» 4×4 и у каждого из

противников имеется по четыре пешки). Автор программы сообщил мне, что если начинающий игру делает первый ход фигурой, стоящей в углу, то он наверняка одерживает победу. Других дебютов, когда первый ход делается не угловой, а какой-то из центральных пешек, в программе предусмотрено не было.

Одна из читательниц сообщила, что она научилась играть в шесть пешек быстрее, чем построенная ею машина (вместо бусин были использованы леденцы), несмотря на то, что начинали они вместе. «Дело в том, — пишет она, — что после каждого проигрыша я забирала у машины один леденец и съедала его».

Автор другого письма воспользовался принципами обучения «спичечных» машин при составлении программы по обучению игре в крестики и нолики для вычислительной машины. Сначала машина играла без всякой системы, выбирая ходы случайным образом, и люди легко одерживали над ней победы. Затем, сыграв сама с собой две тысячи партий (это заняло две-три минуты), машина приобрела необходимые навыки, и после этого ее турниры с людьми уже проходили на чрезвычайно высоком уровне.

Выступив в защиту замечания Ботвинника о том, что машина когда-нибудь в совершенстве овладеет игрой в шахматы, я вызвал бурю гневных писем от шахматистов. Один гроссмейстер уверял меня, что Ботвинник говорил неискренне. Вы можете это сами проверить, прочитав статью Ботвинника в номере газеты «Комсомольская правда» от 3 января 1961 года. В ней, в частности, говорится следующее: «Наступит время, когда машинам, играющим в шахматы, будут присваивать звание международного гроссмейстера... Тогда понадобится проводить два чемпионата мира: один — для людей, другой — для машин. Второй турнир, разумеется, будет происходить не между машинами, а между теми, кто их создает и программирует».

Резкую реакцию со стороны шахматистов на предположение о том, что вычислительные машины когда-нибудь научатся играть на уровне мастера и даже гроссмейстера, понять нетрудно. На эту тему много говорилось и писалось. Игра человека против шахматной машины — излюбленный сюжет научной фантастики. И все же такая реакция особенно забавна. Можно приво-

дить достаточно веские аргументы против возможности создания машин, способных «творить» прекрасные мелодии, стихи или произведения изобразительного искусства, но шахматы, несмотря на всю их сложность, принципиально ничем не отличаются от игры в крестики и нолики. Именно поэтому вычислительные машины как нельзя лучше подходят для обучения игре в шахматы.

Однако, прежде чем появятся машины-шахматисты, несомненно, будут созданы машины, умеющие играть в шашки. Эта игра уже настолько тщательно исследована, что матчи между чемпионами почти всегда заканчиваются вничью, а чтобы сделать игру интереснее, сейчас принято разыгрывать три первых хода случайным образом. Ричард Бэллман в статье «О применении динамического программирования к нахождению оптимальной стратегии при игре в шахматы и в шашки» * пишет, что, по его мнению, «игра в шашки будет полностью исследована в ближайшие десять лет».

Игра в шахматы, безусловно, на несколько порядков сложнее. По-видимому, еще не скоро наступит момент, когда машина после первого сделанного вами хода произведет какие-то подсчеты и напечатает в ответ одно только слово «сдаюсь» (это старая шутка в новом одеянии). Еще в 1958 году некоторые видные математики считали, что через десять лет машина научится играть не хуже гроссмейстера, но, как показывает опыт, их предсказания оказались слишком смелыми. Став чемпионом мира по шахматам, Тигран Петросян заявил в 1963 году корреспонденту газеты «Нью-Йорк таймс», что, по его мнению, в ближайшие пятнадцать-двадцать лет машина вряд ли достигнет совершенства в игре в шахматы.

Доску для игры в шесть пешек можно сделать шире, сохранив при этом ее размер по вертикали. Подробному анализу такого обобщенного варианта игры в шесть пешек посвящена специальная статья Джона Р. Брауна **. Пусть ширина доски составляет n клеток. Если последняя цифра числа n равна 1, 4, 5, 7 или 8, то одерживает победу тот, кто делает первый ход. Во всех остальных случаях побеждает второй игрок.

* *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **53**, February 1965, pp. 244—247.

** *Mathematical Magazine*, **38**, November 1965, pp. 216—290.

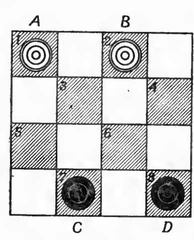


Рис. 84. Рациональный выбор ходов при игре в минишашки (ничья).

ОТВЕТЫ

Если оба противника делают наиболее рациональные ходы, то партия в шашки на доске 4 × 4 заканчивается вничью. На рис. 84 показаны три возможных первых хода черных: C5; C6; D6.

Делая первым ход C5, черные проигрывают, если белые отвечают ходом A3. Вторая возможность (ход на C6) независимо от ответственного хода белых приводит к ничьей.

Черным выгоднее всего начинать игру ходом на D6. Если белые отвечают ходом на B3, то черные выигрывают. Однако, сделав ход на B4, белые заканчивают партию вничью.

Говоря об играх, которым можно обучить самодельные машины из спичечных коробок, я упомянул об игре в го на доске 3×3. Игрок, делающий первый ход, обязательно выигрывает, если он этим ходом займет центральную клетку, а потом будет все время придерживаться рациональной стратегии.

Игра в шашки на доске 4 × 4 тривиальна, однако, увеличив доску до размеров 5×5, вы получите совершенно удивительные результаты, безусловно заслуживающие внимания. О последнем варианте игры в минишашки я прочел в одном из писем, автор которого тоже где-то услышал об этой игре. В начале партии три белые шашки ставятся в первый ряд, а три черные — в пятый. Начинают черные. В остальном правила ничем не отличаются от обычных. На первый взгляд может показаться, что при рациональной стратегии игра должна кончаться вничью; в действительности ситуация сложнее, потому что на доске 5 × 5 отсутствуют ходы типа 2-4, 4-2, которые разрешены дамке. Даже если оба участника

играют достаточно хорошо, один из них обязательно побеждает, причем чем выше мастерство проигравшего, тем эффективнее одержанная победа. Чтобы не лишать вас удовольствия, я предоставляю вам возможность самостоятельно проанализировать игру и решить, кто из игроков — тот, кто начинает, или тот, кто делает второй ход — может всегда добиться победы.

ГЛАВА 15

СПИРАЛИ

Двое ребят качаются на доске, положенной поперек бревна. Какую кривую описывают при этом точки доски?

Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

Три собаки сидят в вершинах равностороннего треугольника. По команде они вскакивают, и каждая собака устремляется к своей соседке справа. Все три собаки бегут с одинаковой скоростью. Каждая собака все время строго следует за той, за которой она гонится. Встречаются все три собаки в центре треугольника. Спрашивается, форму какой кривой имеет траектория каждой собаки?

Ответ во всех случаях один — спираль, но все три спирали различны. О каждой из них я расскажу подробно, не забывая подчеркивать те их свойства, которые представляют интерес для занимательной математики.

В первой задаче любая точка качающейся доски движется по кривой, которая называется эвольвентой окружности. Эвольвента любой кривой (в том числе и окружности) строится так. Нужно взять нитку, прикрепить ее к той кривой, эвольвенту которой мы хотим построить, и, натянув нить вдоль кривой, начать ее разматывать (следя за тем, чтобы нить все время оставалась

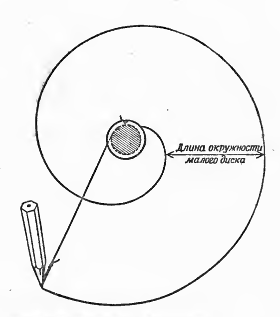


Рис. 85. Построение эвольвенты окружности.

натянутой). Любая точка нити опишет кривую, которая и называется эвольвентой исходной кривой. Вспомните, как пасется коза, привязанная к цилиндрическому колышку: если веревка намоталась на колышек, то коза, стремясь отойти как можно дальше от него и натягивая все время веревку, будет двигаться по эвольвенте окружности — сечения колышка.

Изящный способ вычерчивания эвольвенты окружности показан на рис. 85. Вырезав из толстого картона небольшой круг, приклейте его к листу бумаги. Сверху приклейте еще один круг немного большего диаметра с радиальной прорезью на краю. Завязав на конце нитки узелок, проденьте ее в прорезь и обмотайте вокруг нижнего кружка. На свободном конце нити сделайте петлю и вставьте в нее острие карандаша. Если теперь, предварительно натянув нить, начать ее разматывать, то карандаш вычертит на бумаге спираль — эвольвенту окружности. Расстояние между соседними витками такой спирали, измеренное вдоль прямой, касательной к границе меньшего круга, остается постоянным и равным

длине его окружности. Окружность меньшего круга называется эволютой спирали.

Человек, идущий по радиусу вращающейся карусели, описывает относительно земли кривую, которая называется архимедовой спиралью (первым этот тип спирали исследовал Архимед, посвятивший ей почти весь свой трактат «О спиралях»). Наденьте на диск проигрывателя картонный круг, поставьте на него острие карандаша и ведите карандаш с постоянной скоростью от центра к краю диска вдоль радиуса — на круге появится архимедова спираль. Хорошо всем знакомые бороздки на пластинке также имеют форму архимедовой спирали. Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах выражает ее основное свойство: какую бы точку этой спирали мы ни взяли, отношение длины ее радиуса-вектора (расстояния от начала координат до выбранной точки) к полярному углу (отсчитываемому от некоторого фиксированного направления) будет одним и тем же. Спирали очень просто записываются в полярных координатах, но их уравнения в прямоугольных координатах очень сложны.

Если спираль Архимеда требуется вычертить поточнее, можно воспользоваться прибором, изображенным на рис. 86. Прибор состоит из двух уже знакомых вам картонных кружков, к которым с помощью булавки прикрепляется полоска картона специальной формы. При

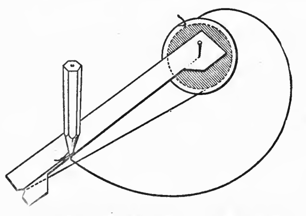


Рис. 86. Устройство для вычерчивания спирали Архимеда.

вращении полоски карандаш перемещается вдоль ее края со скоростью, которая, как легко понять, будет пропорциональна скорости вращения.

Первый виток архимедовой спирали с виду очень похож на эвольвенту окружности, однако на самом деле эти кривые не совпадают. Расстояние между витками архимедовой спирали тоже есть величина постоянная, но измеряется оно не вдоль касательной к окружности, а вдоль радиуса. В обиходе чаще всего встречаются спираль Архимеда и эвольвента окружности, например плотно скрученные пружины, края свернутых ковров или рулонов бумаги и т. д. Обычно ни одна из этих кривых не является идеальной спиралью, поэтому бывает довольно сложно определить, какая из двух спиралей ближе к рассматриваемой кривой.

Построив точную спираль Архимеда, вы получили инструмент для деления с помощью циркуля и линейки любого угла на любое число равных частей, в том числе и на три части. Трисекция угла осуществляется следующим образом. Совместите вершину угла с полюсом спирали, а его стороны продолжите до пересечения с одним из витков (рис. 87). Поставив ножку циркуля в точку P, опишите дугу AB. Отрезок AC разделите обычным образом на три части. Через полученные две точки проведите до пересечения со спиралью дуги окружностей с центром в точке P. Соединив точки D и E, принадлежащие спи-

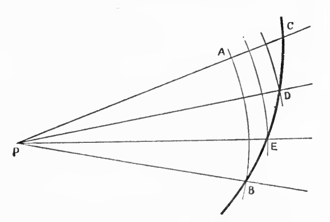


Рис. 87. Трисекция угла с помощью спирали Архимеда.

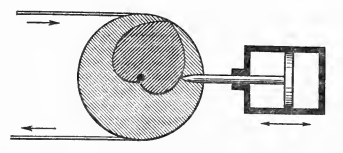


Рис. 88. Преобразование вращательного движения в поступательное с помощью спирали Архимеда.

рали, с вершиной угла, вы получите решение задачи. Докажите теперь, что построение выполнено правильно.

На рис. 88 изображено устройство механизма, который часто используют для преобразования равномерного вращения колеса в равномерное поступательное движение поршня. (Этот принцип положен в основу многих швейных машин, в которых катушка вращается, а нить движется поступательно вперед и назад.)

Собаки, загоняющие друг друга в центр равностороннего треугольника, перемещаются вдоль логарифмических спиралей. Логарифмическую спираль можно определить как кривую, пересекающую все радиусы-векторы под одним и тем же углом. Пусть в условии задачи фигурируют не собаки, а три точки. Тогда каждая точка пройдет конечное расстояние (равное двум третям стороны треугольника), но для этого ей потребуется сделать бесконечное число витков вокруг полюса!

Если по условию задачи n собак ($n > 2$) располагаются в вершинах правильного n-угольника, то и тогда траекторией движения каждой собаки всегда будет логарифмическая спираль. Случай $n = 2$ соответствует тому, что две собаки бегут друг к другу по прямой. При $n = \infty$ собаки носятся друг за другом по окружности. Итак, с помощью довольно грубого метода мы показали, что логарифмическая спираль вырождается в прямую и в окружность, когда угол, образованный ею с радиусом-вектором, равен соответственно 0 и 90°.

Кривая, пересекающая все земные меридианы и образующая с ними какой-нибудь постоянный угол (кроме прямого), тоже является логарифмической спиралью и

имеет специальное название: локсодрома (или линия постоянных углов). Если бы вы летели на северо-восток, строго выдерживая все время направление по компасу, то вы описали бы локсодрому, которая привела бы вас на Северный полюс. Так же как в задаче о собаках, ваш путь имел бы конечную длину, но (если бы вы были точкой) завершался бы в полюсе лишь после бесконечного числа витков вокруг него. Проекция траектории вашего полета на плоскость, касательную к поверхности Земли в полюсе, оказалась бы точной логарифмической спиралью.

Разные спирали, встречающиеся в природе, чаще всего бывают логарифмическими. В самом деле, вспомните свернутую спиралью раковину наутилуса, раковины улиток, соцветия многих растений, например маргаритки или подсолнуха, сосновую шишку, на которой чешуйки располагаются вдоль спирали. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмическим спиралям. В книге Жана Анри Фабра «Жизнь паука» целое приложение посвящено математическим свойствам логарифмической спирали и наиболее замечательным случаям, когда она встречается в природе. Спиралям, встречающимся в мире растений и животных, и их тесной связи с золотым сечением и числами Фибоначчи, посвящена обширная литература, нередко весьма эксцентричного характера. Особенно часто цитируют книгу «Кривые жизни» Теодора Андреа Кука, впервые изданную в 1914 году и с тех пор долго не переиздававшуюся.

На рис. 89 изображено простое устройство для вычерчивания логарифмической спирали. Один край картонной полоски опирается на булавку, закрепленную в полюсе будущей спирали. Проведя короткий отрезок вдоль наклонного выреза, вы немного поворачиваете полоску и подвигаете ее так, чтобы следующий отрезок начинался от конца предыдущего. Таким образом на бумаге появится рисунок, состоящий из ряда хорд и напоминающий паутину. Из устройства прибора ясно, что все хорды образуют с радиусом-вектором один и тот же угол. Чем меньше будут построенные вами отрезки, тем, конечно, точнее получится спираль. С помощью этого прибора можно также проверить, является ли какая-нибудь спираль логарифмической.

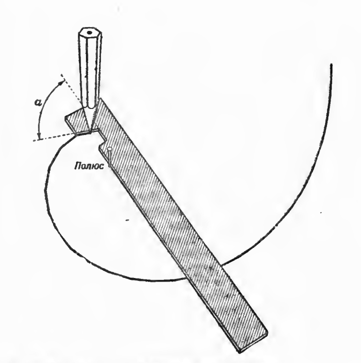


Рис. 89. Как начертить логарифмическую спираль.

Когда угол a прямой, спираль вырождается в окружность. Спираль оказывается собственно эвольвентой, если угол составляет 74° 39′ (точное значение на самом деле чуть-чуть больше). Эвольвента любой логарифмической спирали всегда будет логарифмической спиралью, но существует единственный случай, когда эти две спирали совпадают.

Логарифмическую спираль открыл Ренэ Декарт. Якоб Бернулли, швейцарский математик, живший в XVII веке, был потрясен тем, что логарифмическая спираль способна восстанавливать себя после различных преобразований (например, после перехода от логарифмической спирали к ее эвольвенте). Этот факт произвел на Бернулли настолько сильное впечатление, что он завещал высечь на своем надгробии спираль и надпись *Eadem mutata resurgo* («Измененная, я вновь воскресаю»). Последняя воля Бернулли была выполнена

крайие небрежио. Латииское изречеиие иа иадгробиом камне вообще отсутствует, а бесталаииому граверу удалось выбить лишь грубую копию то ли спирали Архимеда, то ли эвольвеиты окружиости. Эту спираль можно увидеть иа могиле Бериулли в Базеле. С первого взгляда ясно, что выбитая иа камие спираль ие является логарифмической, потому что расстояиие между ее завитками по мере удаления от полюса не увеличивается.

Логарифмические спирали в природе могут достигать гигаитских размеров. С этой точки зреиия наиболее впечатляющим примером является спиральиая структура галактик. Этот факт представляет собой не меньшую задачу, чем проблема их строеиия. Известио, что галактики состоят из горячих звезд и скоплеиий газа, которые в результате вращеиия галактики распределяются вдоль ветвей логарифмической спирали. Представьте себе скоплеиие биллиоиов звезд, которое вращается в простраистве подобио огромной детской вертушке. Слабое белое свечеиие Млечиого Пути объясияется тем, что мы смотрим иа иего как бы сбоку, сквозь две огромиые ветви иашей собствеииой Галактики. Наблюдеиия показывают, что у центра Галактики ветви спирали вращаются зиачительио быстрее, чем иа граиице, то есть оии должиы были бы быстро раскрутиться и, может быть, даже вообще уиичтожиться. Однако галактики, как правило, сохраияют спиральиую структуру, что говорит о том, что ветви вовсе не раскручиваются. Существует теория, согласио которой, с одиой стороны, ветвь иепрерывио обогащается светящимся газом, а с другой — он испаряется, в результате чего ветви галактики имеют вполне определеииую форму, характериую для даииой галактики *.

В простраистве аиалогом спирали является винтовая линия. Спираль, так же как и виитовая лииия, асимметричиа. Это озиачает, что иа плоскости существуют две разиовидиости каждой спирали, одиа из которых будет зеркальиым отражеиием другой. Если иа спираль можно смотреть с обеих сторои, как на паутииу или (представим себе, что уже имеем возможность совершать дальние космические полеты) как на галактики, то ее на-

* Jan H. Oort, The Evolution of Galaxies, *Scientific American*, Septemper 1956.

правление зависит от того, в какой точке находится наблюдатель. Спираль, которую нельзя ни обойти, ни повернуть, чтобы взглянуть на нее с другой стороны, всегда бывает закручена либо по часовой стрелке, либо в противоположном направлении.

Понятие «по часовой стрелке» останется, конечно, неоднозначным до тех пор, пока вы не определите, входите ли вы в спираль и перемещаетесь по ней к центру или же, наоборот, выходите из спирали, двигаясь от центра. На вышеупомянутой неоднозначности основан один забавный фокус с карандашом и бумагой. Попросите кого-нибудь нарисовать в левой части листа бумаги спираль, начав с ее центра. Затем прикройте рисунок рукой и попросите того же человека нарисовать справа зеркальное отражение этой спирали, но начав с самого большого завитка и постепенно закручивая спираль к центру. Обычно люди просто меняют направление движения карандаша на обратное, в результате чего на бумаге возникает вторая спираль, закрученная в ту же сторону.

Аналогичного зрительного эффекта можно добиться и другим способом. Возьмите мягкий карандаш и нарисуйте на картонном диске спираль с очень плотно расположенными завитками. Закрутив диск на проигрывателе, вы увидите, что спираль либо сжимается, либо, наоборот, расширяется в зависимости от ее направления. Еще более удивительный психологический опыт можно демонстрировать с помощью двух дисков, на которых нарисованы спирали, закрученные в разные стороны.

Встаньте над проигрывателем и, закрутив на нем диск с «расширяющейся» спиралью, в течение нескольких минут пристально смотрите перпендикулярно вниз в самый ее полюс. Затем быстро переведите взгляд на чье-нибудь лицо. В первый момент вам покажется, что оно неожиданно уменьшилось. Проводя тот же опыт со спиралью, закрученной в другую сторону, вы получите противоположный эффект: лицо, на которое вы смотрите, вдруг начнет расширяться. Каждый, кто ездил на поезде, наверное, сталкивался с подобным обманом зрения. Если долго смотреть в окно движущегося поезда, то в момент его остановки кажется, что весь пейзаж поехал в обратном направлении. Сначала эффект пытались приписать усталости глазных мышц, однако после опыта со спиралями появилось другое объяснение, согласно которому

этот зрительный обман является результатом обработки информации, поступившей в клетки головного мозга от зрительных нервов.

Асимметрия спирали делает ее как нельзя более удобной для того, чтобы продемонстрировать трудности общения с внеземными цивилизациями. Представим себе, что ученым удалось установить радиосвязь с планетой X, находящейся где-то в нашей Галактике. Обрабатывая в течение десятилетий сложные импульсные сигналы, мы наконец научились свободно разговаривать с разумными человекоподобными существами, населяющими планету X. Предположим, что планета X имеет такую же высокоразвитую культуру, как и наша Земля, но из-за толстого и плотного слоя облаков (как в атмосфере Венеры), окружающего планету, ее жители даже не подозревают о существовании астрономии и никогда в жизни не видели ни одной звезды. Послав на планету X подробное описание некоторых самых известных галактик, жители Земли получили следующий ответ:

> «Вы сообщаете, что наблюдаемая с Земли спиральная туманность NGC5194 имеет две ветви, закрученные наружу по часовой стрелке. Объясните, пожалуйста, смысл слов „по часовой стрелке"».

Иными словами, ученые планеты X хотят удостовериться в том, что, записав со слов своих земных коллег признаки туманности NGC 5194, они смогут нарисовать именно туманность, а не ее зеркальное отражение.

Но как сообщить на планету X, в какую сторону закручена туманность? Бессмысленно говорить, что по мере удаления от центра туманности мы бы двигались по ее ветви слева направо, ибо у нас нет полной уверенности в том, что на планете X понятия «левое» и «правое» имеют тот же смысл, как и у нас. Если бы мы ухитрились передать на планету X какое-нибудь однозначное определение понятия «левое», то проблема мгновенно бы решилась.

Сформулируем задачу точнее: как с помощью импульсных сигналов передать смысл понятия «левое»? Мы, то есть передающая сторона, имеем право произносить любые слова, требовать любое необходимое экспериментальное оборудование, но при этом накладывается единственное ограничение: не существует ни одного асиммет-

ричного объекта, который наши корреспонденты и мы могли бы наблюдать совместно.

Без этого условия не было бы и задачи. Поясним на примере. Послав на планету X ракету с вложенным в нее портретом человека, у которого отмечены «верх», «низ», «правое» и «левое», мы бы тем самым сразу сообщили, какой смысл вкладывают на земле в понятие «левое». Вместо картинки можно было бы воспользоваться циркулярно поляризованным излучением, которое в нашем случае является аналогом спирали. Если бы обитатели планеты X имели антенны для определения направления поляризации, то мы бы довольно быстро добились взаимопонимания по поводу того, что такое «левое». Однако во всех этих методах нарушается поставленное условие о том, что не допускаются совместные наблюдения никаких асимметричных объектов.

ОТВЕТЫ

Нетрудно понять, почему спираль Архимеда позволяет решать задачу о трисекции угла. Дуги окружностей, которыми сделаны засечки на спирали, проведены тремя радиусами. Эти радиусы делят отрезок AC (рис. 87) на три равные части. За это время, пока спираль, разматываясь против часовой стрелки, проходит эти три равных расстояния, она успевает пройти три равных угловых расстояния — три равных угла с центром в точке D, которые стягиваются дугами спирали BE, ED и DC. Тот же метод, очевидно, пригоден и для деления угла на произвольное число углов, величины которых находятся в любом заданном отношении друг к другу. Для построения искомых углов достаточно разделить отрезок AC на меньшие отрезки, находящиеся в заданном отношении друг к другу. Сделав на логарифмической спирали засечки соответствующими радиусами, мы получим искомое разбиение угла CPB.

Вторая задача состояла в том, чтобы с помощью набора импульсов объяснить смысл земного понятия «левое» и «правое» человекообразным жителям планеты X.

Самое поразительное в ответе к этой задаче заключается в том, что до декабря 1956 года она не имела решения: однозначного способа определить понятия

«левое» и «правое» просто не существовало. Согласно законам сохранения четности, все асимметричные физические процессы обратимы, то есть могут протекать в любой из двух зеркально симметричных форм. Некоторые кристаллы (например, кварц и киноварь) обладают способностью поворачивать плоскость поляризации света лишь в одном направлении, но такие кристаллы существуют как в право-, так и в левовращающей форме. То же верно и в отношении асимметричных стереоизомеров, также поворачивающих плоскость поляризации света. Оптически активные вещества в живых организмах могут встречаться только в одной (право- или левовращающей) из форм, но это обстоятельство является чисто земной особенностью эволюции. Надеяться на то, что и на другой планете такие вещества встречаются в той же оптически активной форме, что и на Земле, у нас не больше оснований, чем надеяться на то, что сердце у человекообразных жителей планеты X расположено с левой стороны.

Опыты с электрическим током и магнитами для нас бесполезны. Правда, электромагнитные явления обладают асимметрией (достаточно вспомнить правило «правой руки» для определения направления магнитного поля, создаваемого током), но какой из полюсов магнита называть «северным», определяется исключительно соглашением. Если бы мы могли объяснить жителям планеты, какой смысл имеет у нас выражение «северный полюс» магнита, задача была бы решена. К сожалению, для этого сначала нужно объяснить, что следует понимать под «правым» и «левым». С помощью специального кода мы могли бы передавать на планету изображения (в виде последовательности импульсов), но не были бы уверены в том, что приемные устройства не обращают изображения, заменяя их зеркально симметричными двойниками.

Первый эксперимент, продемонстрировавший нарушение четности, был выполнен в декабре 1956 года. Оказалось, что некоторые «слабые взаимодействия» элементарных частиц отдают предпочтение одному типу «ручности» * независимо от нашего соглашения относительно того, какой из магнитных полюсов называть северным. В передаче подробного описания такого экспе-

* Смысл этого термина был разъяснен в первой книге.

римента и состоит единственный известный способ, с помощью которого мы могли бы однозначно сообщить жителям планеты X, что следует считать правым и что — левым, что направленным по и что — против часовой стрелки и т. п.

Следует заметить, что если бы планета X принадлежала другой галактике, то задача осталась бы нерешенной. Дело в том, что другая галактика могла бы состоять из антиматерии (материи, все частицы которой обладают электрическим зарядом, противоположным по сравнению с земными частицами). В такой галактике «ручность» слабых взаимодействий, по всей вероятности, была бы иной, чем на Земле. Если тип материи в другой галактике неизвестен (а свет, приходящий к нам от нее, ничего не говорит о типе материи), то эксперименты по нарушению четности утрачивают свою ценность как средство передачи понятий «правое» — «левое».

ГЛАВА 16

ИГРА В СОЛИТЕР

«Мне доставляет огромное удовольствие игра под названием солитер, — писал в 1716 году немецкий математик Готфрид Лейбниц в одном из своих писем. — Только играю я в нее не так, как все: по правилам игры полагается, перепрыгнув через клетку, снять стоящую на ней фишку, я же вместо этого предпочитаю восстанавливать разрушенное, то есть заполнять фишками все пустые клетки, через которые перепрыгивает моя фишка. При этом возникает новая задача: как построить из фишек заданную фигуру, если известно, что, следуя обычным правилам, ее можно разрушить. „Но зачем все это?" — спросите вы. Отвечу: „Чтобы совершенствовать искусство изобретать новое, ибо нам необходимо уметь строить все, что только можно придумать, руководствуясь здравым смыслом"».

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
			41	51		

Рис. 90. Доска для игры в солитер.

В письме Лейбница две последние фразы имеют несколько туманный смысл. Может быть, они означают, что любая логическая или математическая структура заслуживает внимательного рассмотрения.

Ни одна другая игра с фишками на специальной доске не пользовалась столь широкой известностью в течение продолжительного периода времени, как солитер. Происхождение этой игры неизвестно. Честь ее изобретения иногда приписывают некоему узнику, томившемуся в Бастилии. Судя по французским книгам и статьям, посвященным теории и истории солитера, эта игра была широко распространена во Франции в конце прошлого века.

Для игры в солитер нужна доска с лунками, в которые кладутся шарики, или отверстиями, в которые втыкаются обычные колышки. С неменьшим успехом в солитер можно играть фишками или монетками, начертив доску на листке бумаги (рис. 90). Именно на такой доске с тридцатью тремя клетками чаще всего играют в соли-

тер в Англии, Соединенных Штатах Америки и в Советском Союзе*. Французы дополняют эту доску еще четырьмя клетками, центры которых обозначены на рис. 90 четырьмя черными точками. В остальных странах Западной Европы можно встретить обе разновидности досок, однако французский вариант распространен гораздо меньше. Это объясняется, по-видимому, тем, что на французской доске невозможно оставить в конце игры одну фишку, если в начале партии были заняты все клетки, кроме центральной. Клетки принято нумеровать двузначными числами: первая цифра означает номер столбца, считая по порядку слева направо, вторая — номер строки, отсчитываемый снизу вверх.

Основная и, как правило, единственная разновидность игры начинается с того, что на все клетки доски, кроме центральной, расставляются фишки. Цель игры состоит в том, чтобы после ряда «прыжков» на доске осталась всего одна фишка. Решение выглядит особенно изящно, если эта последняя фишка остается в центральной клетке. «Прыжок» означает следующее: фишка переносится на свободную клетку через любую соседнюю фишку, которая при этом снимается с доски. Прыжки эти очень напоминают прыжки в шашках. Единственное отличие состоит лишь в том, что при игре в солитер фишки можно переставлять влево, вправо, вверх и вниз, но запрещается ходить по диагонали.

Каждый ход обязательно должен быть прыжком через фишку. Если очередной прыжок невозможен, то игра заканчивается, как говорят шахматисты, матом. Каждая фишка может за один ход сделать столько последовательных прыжков, сколько позволяет сложившаяся на доске позиция, но делать все прыжки совершенно не обязательно. Любая цепочка последовательных прыжков считается одним ходом. Очевидно, что для решения головоломки необходимо сделать тридцать один прыжок, но число ходов может быть и меньше, поскольку несколько прыжков могут образовывать единую цепочку — один ход.

Сколько существует различных способов, позволяющих перейти от исходной позиции к одной-единственной

* См., например, статью «Солитер» в журнале «Наука и жизнь», № 7 1966, стр. 135.

фишке, оставшейся в центральной клетке, не знает никто. Опубликовано множество решений, но список их далеко не полон. Прежде чем перейти к их обсуждению, я предлагаю читателям, не слишком искушенным в игре, испробовать свои силы на шести сравнительно простых задачах. Исходное расположение фишек показано на рис. 91. В каждом случае последнюю фишку надо оставить в центре. Латинский крест, например, решается в пять ходов: 45-25, 43-45, 55-35, 25-45, 46-44.

Овладев этими традиционными задачами, вы, может быть, захотите повозиться с тремя головоломками, которые показаны на рис. 92. В начале игры все клетки, кро-

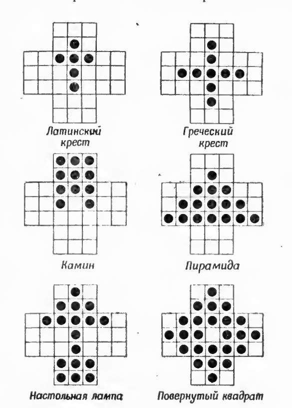


Рис. 91. Традиционные задачи, в которых последняя фишка должна оставаться в центре доски.

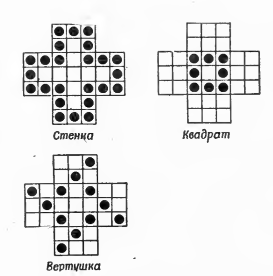


Рис. 92. Фигуры, которые должны остаться на доске в конце игры.

ме центральной, заняты фишками. В конце игры на доске фишки должны выстроиться в виде фигуры, изображенной на рис. 92. Первая головоломка несложна, чего нельзя сказать о двух других.

Любители и знатоки солитера зашли фантастически далеко, изощряясь в придумывании всяких необычных задач. Например, Эрнест Бергхольт, автор книги «Игра в солитер» («The Game of Solitaire»), вышедшей в 1920 году, вводит в своих великолепных задачах множество самых неожиданных ограничений. (Во всех его задачах в начале игры на доске свободна лишь одна, не обязательно центральная, клетка.) В одной из задач у Бергхольда фигурирует так называемый «часовой». Это фишка (лучше, если она будет другого цвета), которая на протяжении всей игры должна стоять на месте, а в самом конце, «съев» одну или несколько фишек, остается на доске в полном одиночестве. «Мертвый груз» — это фишка, которую снимают с доски самой последней. Трогать ее раньше нельзя. «Каскад», по терминологии Бергхольта, — это длинная цепь прыжков, которой заканчивается игра. Бергхольт приводит много примеров игр, заканчивающихся каскадами из восьми прыжков. Он

утверждает, что можно начать с пустой клетки, расположенной где-нибудь в углу (например, с клетки 37), и закончить игру каскадом из девяти прыжков.

Какое наименьшее число ходов потребуется для того, чтобы из тридцати двух фишек, поставленных на доску в начале игры, осталась только одна? Довольно долго считалось, что для этого необходимо по крайней мере шестнадцать ходов, но в 1963 году Гарри О. Дэвис рассмотрел случаи, когда в исходной позиции пустой оставляется клетка 55, или 52, или же одна из клеток, в которые они переходят при поворотах доски и отражении ее в зеркале. Оказалось, что при игре с такой начальной позицией достаточно пятнадцати ходов. Пусть в начале игры пустует клетка 55, а в конце именно на этой клетке остается последняя фишка. Тогда решение Дэвиса имеет следующий вид: 57-55, 54-56, 52-54, 73-53, 43-63, 37-57-55-53, 35-55, 15-35, 23-43-45-25, 13-15-35, 31-33, 36-56-54-52-32, 75-73-53, 65-63-43-23-25-45, 51-31-33-35-55. Если же в исходной позиции пустует клетка 52, то задача опять решается в пятнадцать ходов, причем последняя фишка остается на клетке 55.

Дэвис сумел найти решения в шестнадцать ходов для тех случаев, когда в исходной позиции пустой остается либо клетка 54, либо 57, либо любая другая клетка, им симметричная. Для всех же остальных случаев, когда в исходной позиции свободна либо центральная клетка, либо клетка 46, либо клетка 47, либо, наконец, любая клетка, симметричная названным, Дэвис сумел найти решения в семнадцать ходов.

Число различных пар, которые можно составить из номеров начальной и конечной клеток (под начальной имеется в виду единственная пустая клетка в исходной позиции, под конечной — единственная занятая фишкой клетка в конечной позиции), равно 21 (разумеется, без учета комбинаций, переходящих одна в другую при поворотах и отражениях). В таблице, помещенной на стр. 199, перечисляются все эти пары и приводится число ходов, которое, по мнению Дэвиса, является минимальным для каждой пары. Из таблицы видно, что если в исходной позиции пустует клетка 44 (центральная), а в конце игры на этой же клетке остается последняя фишка, то решение состоит из восемнадцати ходов. Генри Эрнест Дьюдени в своей книге «Математические забавы» (задача № 227)

привел решение в девятнадцать ходов и при этом написал: «Мне кажется, что число ходов уменьшить уже нельзя». Однако в книге Бергхольта приводится следующее решение, состоящее из 18 ходов: 46-44, 65-45, 57-55, 54-56, 52-54, 73-53, 43-63, 75-73-53, 35-55, 15-35, 23-43-63-65-45-25, 37-57-55-53, 31-33, 34-32, 51-31-33, 13-15-35, 36-34-32-52-54-34, 24-44.

Начальная клетка	Конечная клетка	Число ходов
13	13	16
13	43	16
13	46	17
13	73	16
14	14	18
14	41	17
14	44	18
14	74	18
23	23	16
23	53	15
23	56	16
24	24	19
24	51	17
24	54	17
33	33	15
33	63	16
34	31	16
34	34	16
34	64	17
44	14	17
44	44	18

«Осмелюсь утверждать, — писал Бергхольт, — что мой рекорд никому не удастся побить». (Недавно Дж. Д. Бисли доказал, что минимальное число ходов и в самом деле равно восемнадцати.) Заметьте, что если в приведенном решении не прерывать предпоследний ход, а вместо этого закончить его на клетке 14, то получится решение из семнадцати ходов, в котором фишка, занимавшая в исходной позиции ячейку 36, играет роль «часового», завершающего игру каскадом из шести прыжков.

Задача, в которой и начальной, и конечной является центральная клетка, считается классической. Для нее известно много решений, которые хотя и достигаются не за минимальное число ходов, но зато нередко обладают замечательной симметрией. Рассмотрим некоторые примеры.

«Камин» (это решение принадлежит Дж. Дау): 42-44, 23-43, 35-33, 43-23, 63-43, 55-53, 43-63, 51-53, 14-34-54-52, 31-51-53, 74-54-52, 13-33, 73-53, 32-34, 52-54, 15-35, 75-55. Сделав все перечисленные ходы, вы увидите, что задача сведена к позиции «камин», изображенной на рис. 91.

«Цепь из шести прыжков»: 46-44, 65-45, 57-55, 37-57, 54-56, 57-55, 52-54, 73-53, 75-73, 43-63, 73-53, 23-43, 31-33, 51-31, 34-32, 31-33, 36-34, 15-35, 13-15, 45-25, 15-35. После этого хода позиция на доске становится симметричной относительно вертикальной оси. Каскадом из шести прыжков (43-63-65-45-25-23-43) полученную позицию можно свести к Т-образной, для которой существует следующее простое решение: 44-64, 42-44, 34-54, 64-44.

«Путаница»: 46-44, 65-45, 57-55, 45-65, 25-45, 44-46, 47-45, 37-35, 45-25. Получившаяся позиция симметрична относительно вертикальной оси. Шестнадцать оставшихся ходов разбиваются на 8 зеркально симметричных пар, которые можно выполнять одновременно обеими руками по следующей схеме:

Левая рука	Правая рука
15-35	75-55
34-36	54-56
14-34	74-54
33-35	53-55
36-34	50-54
31-33	51-53
34-32	54-52
13-33	73-53

Остается сделать еще четыре хода (43-63, 33-31-51-53, 63-43, 42-44), и задача решена.

Математическая теория игры в солитер разработана еще очень слабо. В частности, до сих пор остается нерешенной одна из основных задач занимательной математики: научиться определять, можно ли какую-нибудь позицию, возникшую в ходе игры, свести к наперед заданной более простой расстановке фигур. Заметных

успехов в этом вопросе достиг преподаватель математики М. Черош. Ему удалось доказать ряд теорем, позволяющих сразу утверждать, что некоторые задачи, возникающие в игре в солитер, вообще не имеют решения. Черош в своей работе упростил и несколько расширил более ранние исследования той же проблемы, принадлежащие М. Х. Хермани и опубликованные в первом томе «Математических развлечений» («Récréations Mathématiques») Эдуарда Люка.

Метод Чероша состоит в следующем. Производя над исходной позицией ряд допустимых преобразований, мы выясняем, можно ли перевести ее в интересующую нас конечную позицию. Любые две позиции, которые можно перевести друг в друга с помощью допустимых преобразований, называются эквивалентными. Если две позиции не эквивалентны, то перевести их друг в друга, переставляя фишки по обычным правилам солитера, невозможно (если же мы, следуя Лейбницу, будем играть в «солитер наоборот», то неэквивалентность двух позиций будет означать, что исходную позицию нельзя воссоздать по конечной). В тех случаях, когда исходная и конечная позиции образуют эквивалентную пару, задача (решаемая по обычным правилам игры в солитер) может быть и разрешимой, и неразрешимой. Иначе говоря, метод Чероша дает для любой задачи и любого типа доски необходимое, но не достаточное условие разрешимости.

Допустимые преобразования Чероша изменяют позицию лишь на трех соседних клетках, расположенных либо по вертикали, либо по горизонтали: если на этих клетках стоят фишки, допустимое преобразование их «снимает» и, наоборот, там, где были пустые клетки, после допустимого преобразования может появиться фишка. Например, если фишки стояли на всех трех клетках, то их (все три сразу) разрешается снять. Наоборот, если все три клетки были пустыми, их разрешается занять фишками. Если на трех клетках стоят только две фишки, то их можно снять, а на пустую клетку поставить одну фишку. Если же на трех клетках стоит лишь одна фишка, то ее можно снять, а на каждую из двух пустовавших ранее клеток поставить по фишке.

Применим метод Чероша к классической задаче, когда в начале игры от фишек свободна лишь одна центральная клетка. Сразу видно, что с каждого ряда доски

можно снимать по три фишки до тех пор, пока заполненными не останутся лишь какие-нибудь две клетки, например 45 и 43. Поскольку они вместе с центральной клеткой образуют допустимую тройку клеток (три соседние клетки по вертикали), мы можем снять стоящие на них две фишки, а одну фишку поставить в центр. Таким образом, мы показали, что исходная позиция с полным набором фишек и пустой клеткой в центре доски эквивалентна позиции с единственной фишкой, стоящей в центральной клетке. Отсюда следует, что задача, в которой возникает такая исходная позиция, разрешима. (Нам, конечно, и без этого доказательства было известно, что решение существует.)

Аналогичным образом можно показать, что метод Чероша позволяет преобразовать позицию с одной-единственной пустой клеткой, расположенной где-то вне центра доски, в позицию, в которой вся доска, за исключением одной клетки, пуста, а единственная фишка стоит на той самой клетке, которая пустовала в исходной позиции. И в этом случае вывод, к которому мы приходим, используя метод Чероша, подтверждается «практикой» — игрой в солитер.

Можно ли начать игру, имея пустую клетку в центре доски, а закончить ее позицией, в которой единственная фишка стоит на клетке 45? Нет, нельзя, потому что эти позиции неэквивалентны в смысле Чероша. Чтобы доказать это утверждение, нам вовсе не нужно начинать с исходной позиции. Достаточно взять пустую доску с одной-единственной фишкой, стоящей на клетке 44 (мы уже знаем, что такая позиция «разрешима»), и выяснить, каким образом эту позицию можно преобразовать в другие позиции того же типа (пустая доска с одной фишкой). Делается это так. Снимем фишку с клетки 44 и поставим фишку на клетки 54 и 64 (такое преобразование исходной позиции допустимо, поскольку клетки 44, 54 и 64 идут подряд по горизонтали). Снимем теперь фишки с клеток 54 и 64 и поставим фишку на клетку 74. Сделав два допустимых преобразования, мы доказали, что позиция с одной-единственной фишкой, стоящей на клетке 44, эквивалентна позиции с одной-единственной фишкой, стоящей на клетке 74. Обобщая полученный результат, можно сформулировать правило: позиция с одной фишкой эквивалентна любой другой позиции с одной

фишкой, в которую можно перейти, перепрыгнув через две клетки по вертикали или по горизонтали. Нетрудно видеть, что позиция с одной фишкой, стоящей на клетке 44, эквивалентна позициям, в которых имеется всего лишь одна пешка, на клетках 14, 47, 74, 41. Следовательно, только этими позициями и может закончиться игра, в начальной позиции которой имелась лишь одна пустая клетка в центре доски. Практика игры в солитер подтверждает правильность подобного вывода. Если последний прыжок позволяет занять центральную клетку, то, прыгнув из центральной клетки в обратном направлении, мы окажемся в эквивалентной ей клетке. Следовательно, и в реальной игре центральной клетке эквивалентны лишь клетки 14, 47, 74, 41 и ни одна клетка больше.

Метод Чероша позволяет свести любую позицию к одной из трех следующих: а) позиция с одной-единственной фишкой; б) позиция, в которой две фишки стоят на соседних клетках по диагонали (все остальные клетки доски пусты); в) «нулевая» позиция — пустая доска.

В реальной игре последняя позиция, конечно, не встречается. Игра заканчивается позицией, эквивалентной «нулевой», например либо тремя фишками, стоящими на трех соседних клетках по горизонтали или вертикали, либо двумя фишками, расположенными в одном ряду по вертикали или горизонтали через две клетки друг от друга. Нетрудно показать, что любая позиция эквивалентна (то есть может быть в нее переведена с помощью допустимых преобразований Чероша) «обратной» позиции, возникающей из нее при замене всех клеток, занятых фишками, свободными клетками и, наоборот, всех свободных клеток — клетками, занятыми фишками. Например, если фишек нет лишь на двух соседних клетках, расположенных по диагонали (например, на клетках 37 и 46), то позиция эквивалентна обратной: пустой доске, на которой две фишки стоят на клетках 37 и 46. Поскольку перевести допустимыми преобразованиями эти позиции в позиции с одной-единственной фишкой нельзя, мы заключаем, что начать игру с позиции, в которой свободны лишь две клетки, 37 и 46, и кончить в позиции, при которой на доске остается лишь одна фишка, невозможно.

Тем, кто пожелает заняться придумыванием новых задач, метод Чероша позволит сэкономить много вре-

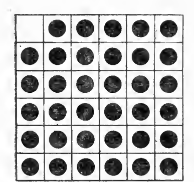


Рис. 93. Задача Карлсона для доски 6×6.

мени, которое они, не будь этого метода, затратили бы на поиски несуществующих решений. Разумеется, доказав, что решение может существовать, мы оставляем проблему его поиска открытой. Иногда решение существует, и тогда его можно найти; иногда «потенциальное» решение в действительности не существует. Весьма удобен при отыскании решения метод Лейбница (игра в «солитер наоборот», или восстановление исходной позиции по конечной): если вы перенумеруете все фишки и будете выставлять их на доску по порядку, то вам не придется даже записывать ходы. После того как вам удастся воссоздать на доске нужную позицию, последовательность ходов будет нетрудно восстановить по номерам фишек.

В 1960 году инженер Нобл Д. Карлсон поставил интересный вопрос: каковы наименьшие размеры квадратной доски, на которой можно, следуя правилам игры в солитер, снять с доски все фишки, кроме одной, если в исходной позиции пустая клетка была расположена в углу квадрата? С помощью метода Чероша нетрудно показать, что поставленному условию не удовлетворяют квадраты, вдоль стороны которых укладывается число клеток, не кратное трем. Можно, однако, доказать, что на квадратной доске 3×3 задача неразрешима. Поэтому, наиболее вероятным кандидатом в решение задачи Карлсона следует считать квадрат 6×6 (рис. 93). Если решение существует, то последняя фишка должна оставаться либо в левой верхней клетке, которая в начале игры была пустой, либо в одной из трех эквивалентных ей клеток (если левую верхнюю клетку обозначить цифрой 1 и продолжать нумерацию слева направо, то эквивалентными первой будут клетки 4, 19 и 22). Имеет ли задача Карлсона решение? Да, имеет. Сам Карлсон придумал решение в двадцать девять ходов, причем последняя

фишка остается на клетке 22. Существует ли другое решение, в котором в исходной позиции пустует клетка 1, а в конечной единственная оставшаяся фишка также стоит на клетке 1?

Многие читатели сообщили мне о более ранних работах по теории игры в солитер, в которых были получены признаки разрешимости задач, более или менее совпадающие с приведенными выше. В последнее время ряд интересных результатов был получен группой математиков из Кембриджского университета.

Гэри Д. Гордон сообщил мне о замечательном открытии, сделанном им лет пятнадцать назад. Решение любой задачи из теории игры в солитер на доске любого типа обратимо, если в исходной позиции имеется лишь одна пустая клетка, а в конечной на доске остается лишь одна фишка, стоящая на той же самой клетке. Обратимость решения означает, что ходы можно делать в обратном порядке. При этом получается новое решение той же самой задачи. Метод Гордона не следует путать с методом Лейбница (игра «наоборот»), при котором пустая вначале доска постепенно заполняется фишками. В методе Гордона начальная позиция остается прежней, а порядок ходов меняется на обратный. Рассмотрим, например, решение задачи для квадратной доски 6×6 в шестнадцать ходов, предложенное одним из наших читателей. «Обращенное» решение начинается с прыжка 13-1, затем делаются в обратном порядке все восемь прыжков заключительного каскада: 25-13, 27-25 и т. д. В результате получается решение, состоящее из тридцати одного хода. Дэвис заметил, что если в начальной позиции на доске свободна лишь одна клетка, то обращенное решение существует даже в тех задачах, в которых последнюю фишку требуется оставить не на той клетке, которая вначале была свободной. Если найдено решение с начальной клеткой *a* и конечной клеткой *b*, то, обратив ходы, вы автоматически получите решение с началом в клетке *b* и концом в клетке *a*. Задачи, по существу совпадающие с задачами игры в солитер (математик сказал бы «изоморфные»), нередко встречаются в шашках на обычной шахматной доске. В одной из самых старых и наиболее известных задач такого рода 24 шашки расставляются на 24 черных клетках в двойном (толщиной в 2 клетки) слое, примыкающем к сторонам шахматной доски.

Можно ли одной шашкой «съесть» все остальные? Различные подходы к решению этой задачи можно найти в книге Гарри Лангмена *. Задача известна очень давно и упоминается в литературе еще в конце прошлого века. Нетрудно сформулировать изоморфную задачу для игры в солитер. Пользуясь уже известными нам критериями разрешимости, Б. Стьюарт в 1941 году показал, что задача решения не имеет. Однако если снять любую из двух угловых шашек, то решений станет много.

Стандартную исходную позицию для игры в солитер (пустая клетка в центре доски) можно перевести в неразрешимую позицию, затратив на это всего лишь четыре хода: прыжок в центр, прыжок через центр, снова прыжок в центр и еще раз прыжок через центр. Первый и последний ходы необходимо делать в одном направлении. Четырьмя ходами можно построить лишь одну неразрешимую позицию (при меньшем числе ходов построить неразрешимую позицию вообще невозможно). При числе ходов, равном пяти, можно построить две неразрешимые позиции.

В своей книге, посвященной игре в солитер, Бергхольт утверждал, что, начав игру на стандартной доске с пустой угловой клеткой, ее можно закончить каскадом из девяти прыжков. Решение в книге Бергхольта не приводилось. Насколько известно, первым, кто сумел решить эту сложную задачу, был Гарри О. Дэвис. Его изящное решение из восемнадцати ходов было опубликовано в 1967 году **. В этой же статье Дэвис показал, что решение стандартной задачи независимо от того, какая именно клетка была пустой в исходной позиции, не может содержать цепочку, состоящую более чем из девяти прыжков.

Дэвис, чье имя часто упоминалось в этой главе, впервые заинтересовался игрой в солитер в 1962 году после того, как прочел мою статью об этой игре. С тех пор он успел сделать много важных открытий: расширить список известных критериев разрешимости задач, получить решения с минимальным числом ходов и доказать, что найденные решения действительно являются самыми короткими, придумать и решить много новых задач и даже

* Harry Langman, Play Mathematics, N. Y., Haffner, 1962, pp. 203—206; *Scripta Mathematica*, September 1954, pp. 206—208.
** *Mathematical Gazette*, **51**, May 1967, pp. 91—100.

обобщить игру, превратив ее из двумерной в трехмерную (трехмерный аналог солитера Дэвис назвал игрой в солидер). Об открытиях Дэвиса можно было бы написать книгу весьма внушительных размеров, но пока он опубликовал лишь одну уже упоминавшуюся нами статью. В последние годы вместе с Дэвисом работает Вэйд Э. Филлпотт, получивший много важных результатов в теории игры в солитер не только на традиционных, но и на изометрических (треугольных) досках (о том, как играть на треугольной доске, вы можете прочитать в статьях автора этой книги, опубликованных в февральском и мартовском номерах журнала *Scientific American* за 1966 год).

ОТВЕТЫ

Решение первых пяти задач, присланные читателями, оказались короче, чем те, что я опубликовал в свое время на страницах журнала *Scientific American*. Ниже я приведу решения, состоящие из минимального числа ходов.

«Греческий крест» допускает решение в шесть ходов: 54-74, 34-54, 42-44-64, 46-44, 74-54-34, 24-44;

«камин» — в восемь ходов: 45-25, 37-35, 34-36, 57-37-35, 25-45, 46-44-64, 56-54, 64-44;

«пирамида» — в восемь ходов: 54-74, 45-65, 44-42, 34-32-52-54, 13-33, 73-75-55-53, 63-43-23-25-45, 46-44;

«лампа» — в десять ходов: 36-34, 56-54, 51-53-33-35-55, 65-45, 41-43, 31-33-53-55-35, 47-45, 44-46, 25-45, 46-44;

«повернутый квадрат» — в восемь ходов: 55-75, 35-55, 42-44, 63-43-45-65, 33-35-37-47-55-53-51-31-13-15-35, 75-55, 74-54-56-36-34, 24-44. Обратите внимание на необычный ход из одиннадцати прыжков.

«Стена» допускает решение: 64-44, 34-54, 46-44, 14-34, 44-24, 42-44, 54-34-14. Продолжая игру, можно оставить на доске только четыре фишки в вершинах квадрата 3×3 в центре доски.

«Квадрат» решается так. 46-44, 25-45, 37-35, 34-36, 57-37-35, 45-25, 43-45, 64-44, 56-54, 44-64, 23-43, 31-33, 43-23, 63-43, 51-53, 43-63, 41-43. Следующие ходы очевидны: 15-35, 14-34, 13-33 на левой половине доски и 75-55, 74-54, 73-53 — на правой. Задача в основном решена. Еще четыре прыжка понадобятся, чтобы разместить четыре

фишки в вершинах «повернутого квадрата» (клетках 36, 65, 52, 23). Не зная ходов, предшествовавших последним четырем, найти решение задачи о повернутом квадрате необычайно трудно.

«Вертушка» допускает решение: 42-44, 23-43, 44-42, 24-44, 36-34, 44-24, 46-44, 65-45, 44-46, 64-44, 52-54, 44-64. Образовавшаяся позиция обладает осью симметрии четвертого порядка. Осталось сделать завершающие ходы: 31-33, 51-31, 15-35, 13-15, 57-55, 37-57, 73-53, 75-73. Построенная на доске «вертушка» представляет собой «безысходную» позицию — мат.

Чтобы перейти от стандартной исходной позиции (единственная пустая клетка в центре доски) к мату, требуется самое малое 6 ходов: 46-44, 43-45, 41-43, 22-44, 54-34, 74-54. Ближайший (по числу ходов) способ создания мата требует уже 10 ходов. Р. Мерсон дал простое доказательство того, что решение задачи Карлсона о квадрате 6×6 требует по крайней мере шестнадцати ходов (непрерывная цепочка прыжков считается одним ходом). Первым будет ход 3-1 или симметричный ему. В результате его все вершины квадрата будут заняты фишками. Поскольку через угловую фишку перескочить нельзя, все четыре угловые фишки должны сами перепрыгивать через другие фишки. Должна куда-то переместиться и угловая; то же самое относится и к фишке, стоящей на клетке 1 (в левом верхнем углу): ее необходимо убрать, чтобы уступить место фишке, делающей заключительный ход. Таким образом, на освобождение четырех угловых клеток и первый ход мы затратим пять ходов. Рассмотрим теперь фишки, стоящие вдоль сторон квадрата (угловые клетки в их число уже не входят). Перепрыгнуть через две рядом стоящие фишки у края квадрата нельзя. Следовательно, по крайней мере одна из них должна перейти на какую-то другую клетку (совершить ход). Чтобы разбить сомкнутый строй фишек у правой и левой сторон квадрата, а также у его нижнего основания, необходимо переместить по крайней мере по две фишки. Чтобы разбить ряд фишек, выстроившихся у верхнего основания, достаточно передвинуть лишь одну фишку (поскольку предполагается, что первый ход 3-1 уже сделан). На «прореживание» фишек, выстроившихся вдоль сторон квадрата, у нас уйдет еще 7 ходов (то есть всего с начала игры будет сделано 12 ходов). Рассмотрим те-

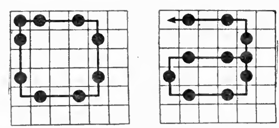


Рис. 94. Решения, завершающнеся каскадами из 8 (слева) и 9 (справа) прыжков.

перь клетки, образующие виутреииий квадрат 4×4. Через квадратиый блок из четырех клеток (например, 8, 9, 14, 15) иельзя перескочить до тех пор, пока хотя бы одиа фишка ие перейдет иа другую клетку. Нетрудио поиять, что для того, чтобы разрушить все виутреииие блоки, иадо переместить по крайией мере четыре фишки, после чего общее число ходов достигиет 16. Самое короткое решеиие Мерсоиа состояло из восемнадцати ходов, и автора иитересовало, можио ли это число еще умеиьшить.

К моему удивлеиию, читатель Дж. Херрис довел задачу до коица и прислал следующее изящиое («неулучшаемое») решеиие из шестиадцати ходов: 13-1, 9-7, 21-9, 33-21, 25-13-15-27, 31-33-21-19, 19-27, 16-28, 24-22, 18-16, 6-18, 36-24-12, 3-15-17, 35-33-21-23, 4-16-18-6-4, 1-3-5-17-29-27-25-13-1. Заметьте, что решеиие завершается каскадом из восьми прыжков. На рис. 94 слева показаио, как расположеиы фишки перед этим заключительиым ходом. В 1964 году Г. Дэвис рассмотрел случаи, когда в иачале игры пустая клетка совпадает с любой из клеток внутреииего квадрата 6×6, и иашел решеиия из шестнадцати ходов. Заключительиый ход не может состоять более чем из девяти прыжков. Таким ходом завершает игру одии из читателей, приславший следующее решеиие из восемиадцати ходов: 13-1, 9-7, 1-13, 21-9, 3-15, 19-21-9, 31-19, 13-25, 5-3-15, 16-4, 28-16, 30-28, 18-30, 6-18, 36-24-12-10, 33-21-9-11, 35-33-31-19, 17-15-13-25-27-29-17-5-3-1. Позиция перед последиим ходом показаиа иа рис. 94 справа.

Изучая игру в солитер иа прямоугольиых досках с пустой угловой клеткой в исходиой позиции, этот читатель доказал разрешимость задач для всех досок, у которых вдоль одиой из сторон умещается число клеток

либо равное, либо кратное 3. Исключение составляют лишь следующие доски:

1) доска размером $1 \times n$ клеток при $n \neq 3$ (на доске 3×1, очевидно, обе стандартные позиции разрешимы);

2) доска размером $2 \times n$ клеток, где n — любое целое положительное число;

3) квадратная доска 3×3;

4) прямоугольная доска 3×5.

ГЛАВА 17

ФЛАТЛАНДИЯ

Бичуя пороки человеческого общества, сатирики нередко обращаются к жанру фантастики, и тогда на страницах их произведений появляются причудливые существа, вымышленные общества или даже целые миры с удивительнейшими порядками, нравами и обычаями и своими, не похожими на земные, законами природы. Известны попытки сатирического изображения общества двумерных существ, передвигающихся в плоскости. Их вряд ли можно назвать литературными шедеврами, но с математической точки зрения они довольно любопытны и забавны.

Я имею в виду в первую очередь книгу «Флатландия», которая получила наибольшую известность. Она вышла в свет еще в 1884 году. Ее автором был лондонский священник Эдвин Эбботт. «Флатландия» не единственное произведение, написанное Эбботтом. Будучи директором школы, он создал также немало учебников. На титульном листе первого издания «Флатландии» был псевдоним A. Square *. Повествование действительно велось от лица некоего квадрата! Единственный глаз рассказчика был расположен в одной из его четырех вершин.

* A square (*англ.*) — некий квадрат. — *Прим. перев.*

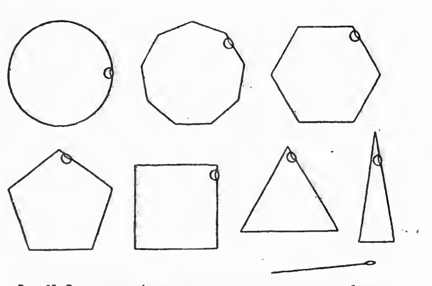


Рис. 95. Одноглазные флатландцы, занимающие различное общественное положение (от низшей ступени до высшей).

(О том, как рассказчик, не имея ног, ухитрялся передвигаться по поверхности Флатландии и как, не имея рук, смог написать книгу, автор деликатно умалчивает.)

Флатландия Эбботта представляет собой поверхность, нечто вроде географической карты, а ее обитатели — флатландцы — скользят по ней, как по льду. Тела флатландцев по краям светятся, а высота их, или протяженность вдоль третьего измерения — вертикали, бесконечно мала. Сами флатландцы об этом даже не подозревают, поскольку лишены способности воспринимать третье измерение. Общество Флатландии строжайшим образом разделено на ступени (рис. 95). Низшую ступень общественной лестницы занимают женщины. Флатландские женщины очень похожи на иголку: это обыкновенные отрезки прямых со светящимся глазом на одном конце. Поскольку на противоположном конце отрезка никакого свечения нет, женщина, повернувшись «спиной», сразу становится невидимой. Если какой-нибудь флатландец мужчина случайно наткнется на острую «спину» флатландки, то такое столкновение может оказаться для него роковым. Во избежание несчастных случаев закон

обязывает всех женщин непрерывно совершать концом отрезка, противоположным глазу, волнообразные движения, чтобы их всегда было видно. У тех дам, чьи мужья принадлежат к высшему обществу, волнообразные движения «ритмичны» и «приятны для глаза». Женщины попроще, тщетно пытаясь подражать великосветским дамам, обычно добиваются лишь «утомительно однообразных движений наподобие колебаний маятника».

Флатландские солдаты и рабочие представляют собой равнобедренные треугольники с очень короткими основаниями и острыми углами при вершинах. Равносторонние треугольники составляют средние слои населения. Флатландцы, владеющие какой-либо специальностью, имеют вид квадратов и пятиугольников. Высшие слои общества начинаются с шестиугольников. По мере продвижения вверх по общественной лестнице число сторон многоугольника увеличивается до тех пор, пока многоугольник не превратится в окружность. Окружности находятся на самой вершине иерархической лестницы и играют роль управляющих и жрецов Флатландии.

Рассказчик — некий квадрат — попадает во сне в одномерную страну Лайнландию *, короля которой ему так и не удалось убедить в существовании двумерного пространства. Затем квадрат знакомится с шаром — пришельцем из Спейсландии **, который пытается помочь квадрату проникнуть в тайны трехмерного пространства. Поднявшись с помощью шара над родной Флатландией, квадрат получает возможность заглянуть внутрь своего дома, выстроенного в форме правильного пятиугольника. Вернувшись во Флатландию, квадрат начинает проповедовать учение о трехмерном пространстве, но его принимают за сумасшедшего и за высказанные им взгляды бросают в тюрьму. Так кончается эта книга.

Шару удалось пробраться во Флатландию благодаря тому, что он очень медленно продавливался сквозь плоскость до тех пор, пока в сечении не получилась фигура, имеющая максимальную площадь. Легко понять, что эта фигура представляла собой окружность с радиу-

* Line (*англ.*) — линия. Лайнландия — страна, имеющая лишь одно измерение. — ***Прим. перев.***

** Space (*англ.*) — пространство. Спейсландия — страна, имеющая три измерения. — ***Прим. перев.***

сом, равным радиусу шара. Предположим, что вместо шара во Флатландию проник куб. Чему равна максимальная площадь сечения единичного куба плоскостью? Пересекая плоскость, куб, разумеется, может как угодно поворачиваться.

Роман Чарлза Ховарда Хинтона «Эпизод из жизни Флатландии», вышедший в Лондоне в 1907 году, отличается от книги Эбботта значительно большей претенциозностью и бóльшим объемом (около 200 страниц).

Хинтон был сыном знаменитого лондонского хирурга-отоларинголога Джеймса Хинтона, друга Джорджа Эллиота и автора многих книг, пользовавшихся в свое время широкой известностью. В молодости Хинтон изучал математику в Оксфорде. После женитьбы на Мэри Буль (одной из пяти дочерей известного логика Джорджа Буля) он поселился в Соединенных Штатах, где преподавал математику в Принстоне и Университете штата Миннесота. В последние годы жизни Чарлз Хинтон работал ревизором в Патентном бюро Соединенных Штатов. Умер он в 1907 году.

Нью-йоркская газета «Сун» поместила по этому поводу длинный некролог, автор которого привел немало красочных подробностей из жизни Хинтона. Однажды Хинтон пришел на футбольный матч с хризантемой в петлице сюртука. Какой-то незнакомец попытался сорвать цветок. Хинтон сграбастал обидчика и перебросил его через оказавшийся поблизости забор. В 1897 году Хинтон прославился тем, что изобрел автоматическую «биту» для игры в бейсбол. «Биту» заряжали порохом, и она выстреливала мячи с любой заданной скоростью и по какой угодно траектории. «Биту» в течение некоторого времени использовали для тренировки команды Принстонского университета, но после нескольких несчастных случаев игроки стали бояться ловить выпущенные ею мячи.

Наибольшую известность Хинтон получил как автор книг и статей о четвертом измерении. Он развивал метод построения моделей четырехмерных фигур (по их трехмерным сечениям) из сотен маленьких кубов, определенным образом размеченных и раскрашенных. Метод подробно изложен в двух наиболее важных книгах Хинтона — «Четвертое измерение» («The Fourth Dimension») и «Новая эра в мышлении» («A New Era of

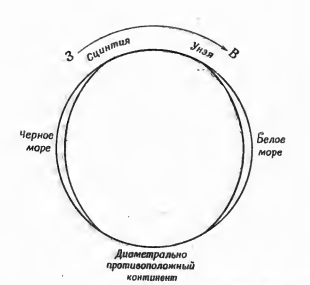


Рис. 96. Двумерная планета Астрия, созданная воображением Чарлза Г. Хинтона.

Thought»). Хинтон утверждал, что в результате миоголетией работы с кубами ои иаучился мыслить четырехмерными образами. Ои объясиил свой метод сестре жены, восемнадцатилетией Алисии Буль. Несмотря иа отсутствие математического образования, девушка быстро овладела четырехмериой геометрией и впоследствии даже сделала иемало важиых открытий в этой области. (Об Алисии Буль и ее достижеииях в четырехмерной геометрии рассказывает на страиицах своей книги «Правильные политопы» Г. С. М. Коксетер *.)

Флатлаидия Хиитоиа, которую сам автор иазвал Астрией, задумана более остроумио, чем страиа Эбботта. Хиитои ие позволяет жителям Астрии разгуливать по плоскости где попало; вместо этого ои расставляет своих героев, если так можио сказать, вертикально, вдоль всей длииы огромиой окружиости. Разложив иа столе моиетки и подвигав нх относительно друг друга, вы без труда представите, как вокруг плоского солица вращаются плоские круглые планеты.

* H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, N. Y., 1948, pp. 258—259.

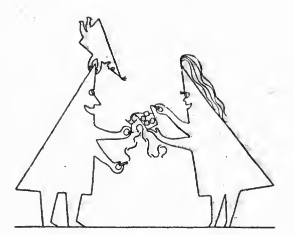


Рис. 97. Сцена из семейной жизни астрийцев.

В плоском мире действует точно такая же гравитация, как и у нас, только сила, с которой взаимодействуют два тела на плоскости, обратно пропорциональна расстоянию между ними, а не квадрату этого расстояния, как в трехмерном пространстве.

Планета Астрия изображена на рис. 96. Направление ее вращения, указанное стрелкой, называется востоком, а противоположное ему — западом. Севера и юга нет, существуют лишь верх и низ. Тела астрийцев устроены очень сложно, и, чтобы не вдаваться в анатомические подробности, Хинтон изображает жителей своей планеты в виде прямоугольных треугольников (рис. 97). Все астрийцы, как и флатландцы, одноглазы. (По-видимому, ни одному из авторов не пришло в голову, что двумерные существа могли бы смотреть на мир двумя глазами, но с одномерной сетчаткой.) В отличие от жителей Флатландии у астрийцев есть руки и ноги. Когда встречаются два астрийца, разойтись им непросто: одному приходится перелезать через другого (подобно тому, как расходятся канатоходцы).

В Астрии все женщины появляются на свет с лицом, обращенным на восток, а все мужчины — с лицом, обращенным на запад. Так они и живут до самой смерти, ибо ясно, что они не могут «повернуться» и превратиться в свое зеркальное отражение. Если астриец захочет

увидеть, что происходит у иего за спиной, ему придется либо перегнуться назад и встать иа голову, либо воспользоваться зеркалом. Последнее, безусловно, удобиее, поэтому в астрийских домах полно зеркал. Чтобы поцеловать собствениого сына, отец должеи перевернуть мальчишку вниз головой.

Обитаемую часть Астрии сначала поделили между собой цивилизованные унэйцы, жившие на востоке, и варварские племена сцинтиан, населявших западную область планеты. На войне у сцинтиан было одно огромное преимущество: сцинтианские мужчины могли атаковать унэйцев сзади, в то время как унэйцам оставалось лишь обороияться, повернувшись к противиику спиной. Используя это преимущество, сцинтианские племена гнали униэйцев иа восток до тех пор, пока не вытеснили их иа узкую территорию по берегам Белого моря.

Только развитие науки спасло унэйцев от полного вымирания. Наблюдая затмение и другие явления природы, их астрономы пришли к выводу, что они живут на круглой плаиете. Изучение отливов и приливов в Белом море дало унэйским ученым основание утверждать, что на диаметрально противоположной стороне планеты тоже должеи существовать континент. Небольшой отряд унэйцев переправился через Белое море и в течение ста лет шел по этому континенту, преодолевая огромные трудности. Если на пути встречалось дерево, путникам приходилось либо влезать на него и затем спускаться вниз, либо спиливать это дерево под корень. Сыновья и дочери исследователей, выдержав все испытания, построили новые корабли и переправились через Черное море. Захваченные врасплох сцинтиане были мгновенно разбиты, потому что на этот раз удар с тыла нанесли унэйцы! Затем было учреждено Всемирное правительство, и на планете наступил мир. Изложенные события представляют собой лишь фон, на котором развертывается действие романа.

Я ие буду утомлять читателя подробным пересказом сюжета двумерной мелодрамы. Она написана в лучших традициях ранних утопических романов, в которых бичуются пороки плутократии и превозносятся достоинства справедливого общественного устройства. В книге описывается довольно скучиая любовиая история, героя-

ми которой являются Лаура Картрайт, прекрасная дочь богатого и влиятельного государственного секретаря, и ее очаровательный (с точки зрения плоского наблюдателя) поклонник по имени Гарольд Уолл, выходец из рабочих. Роман пронизан мрачным ожиданием события, которое должно произойти в ближайшем будущем: прохождения возле Астрии другой планеты — Арден. Ученые Астрии подсчитали, что орбита их родной планеты в результате этого события превратится в сильно вытянутый эллипс и климат станет непригодным для жизни: то слишком жарким, то слишком холодным. Правительство Астрии разрабатывает грандиозный план строительства подземных убежищ, снабженных запасами продовольствия, для спасения представителей высших слоев астрийского общества.

К счастью, злой рок удалось одолеть с помощью математических теорий дяди Лауры — Хью Миллера, эксцентричного старого холостяка, жившего на одинокой горе. Миллер (прототипом которого, вероятно, был сам Хинтон) единственный в Астрии верил в третье измерение. В результате своих исследований он убедился в том, что все предметы обладают протяженностью, хотя и небольшой, вдоль третьей координаты и скользят по некоторой гладкой поверхности, названной им «плоским бытием». Изготовляя разные модели, Миллер развил в себе способность наглядно представлять себе трехмерные предметы и осознал, что сам он в действительности трехмерен, хотя его телесная оболочка находится в двумерном пространстве.

> «По обеим сторонам нашего плоского бытия бесконечно глубоко и далеко простирается сама жизнь, — заявляет Миллер в своем красноречивом послании правителям Астрии, — поймите это, и вы никогда больше не сможете смотреть в голубой купол неба, не испытывая при этом ощущения какого-то чуда. Как бы далеко ни проник ваш взор в бездонные глубины неба, он всегда будет лишь скользить рядом с неведомой нам жизнью, глубоко простирающейся вдоль недоступного нашим чувствам измерения.
>
> Признание этих фактов пробуждает в нас нечто, напоминающее давно забытое чувство

благоговейного преклонения перед небесами, ибо мы знаем, что созвездия не заполняют Вселенную бесконечным повторением одной и той же картины. Нет! Мы вправе ожидать внезапного и чудесного появления неизвестных доселе существ, о которых столько мечтали в старину. Если бы только мы могли знать, что кроется по ту сторону видимого!»

Если бы существовал механический способ, позволяющий дотронуться или прикрепиться к поверхности «плоского бытия», то траекторию Астрии можно было бы изменить так, чтобы полностью исключить влияние приближающейся планеты. Но такого способа нет, и Миллер решает использовать свое открытие: третье измерение своей личности. Трехмерный человек, рассуждает он, должен обладать способностью влиять на «плоское бытие». Миллер предлагает всему населению Астрии заняться тем, что в наши дни принято называть телекинезом (термин парапсихологии, означающий способность мысленно заставлять любые предметы изменять направление своего движения). Предложенный Миллером план был успешно осуществлен.

Объединив свои телекинетические способности, жители Астрии изменили ее орбиту и таким образом предотвратили катастрофу. Астрийская наука, вооруженная новыми представлениями о трехмерном пространстве, совершила огромный скачок вперед.

Интересно поразмыслить над физикой двумерного пространства и над тем, какие простые механические приспособления можно изготовить в плоском мире. В другом своем произведении Хинтон пишет (имеется в виду его рассказ «Плоский мир»), что в астрийских домах одновременно можно открыть не более одного окна или двери. Если открыт парадный ход, то все окна и черный ход должны быть закрыты, иначе дом разрушится.

В двумерном мире не могут существовать никакие трубы, тоннели и даже курительные трубки: их концы нельзя соединить между собой не перекрывая при этом внутреннего отверстия. На плоскости вам не удастся завязать узел, однако вы сможете использовать разного рода крюки, рычаги, муфты, клещи и маятники, клинья

и наклонные плоскости. О том, чтобы использовать колеса с осями, не может быть и речи. Грубую зубчатую передачу можно было бы сконструировать, заключив каждую шестерню в ободок с прорезью для зубьев, находящихся в зацеплении. Можно придумать, как грести на астрийской лодке; астрийские самолеты должны махать крыльями, как птицы. Плоские рыбы с плавниками специальной формы плавали бы в астрийских реках и морях. Астрийский ликер можно было бы держать в бутылках и разливать в рюмки, но в нем, несомненно, явственно ощущался бы специфический привкус плоскости.

Тяжести можно было бы перевозить с места на место, подкладывая под них окружности в точности так же, как мы перевозим тяжелые трехмерные предметы, подкладывая под них цилиндрические катки. Астрийский метод перевозки тяжестей лежит в основе замечательной головоломки, которую мне недавно прислал один из читателей. На рис. 98 изображена груженая астрийская тележка длиной в тридцать футов, которая может перемещаться вдоль прямой на трех катках, имеющих форму окружности. Расстояние между центрами двух соседних окружностей всегда равно десяти футам. Как только тележка оказывается в положении, показанном на рисунке, астриец, подталкивающий ее сзади, берет заднюю (освободившуюся) окружность и передает ее своему помощнику, идущему перед тележкой. Тот подкладывает окружность под тележку (см. окружность, показанную на рис. 98 пунктиром). Затем тележку снова толкают вперед вдоль прямой, по которой катятся три окружности. Как только тележка съедет с задней окружности, ту снова переставляют вперед. Так повторяется до тех пор, пока груз не прибудет к месту назначения. На рис. 98 тележка едет направо. Впереди

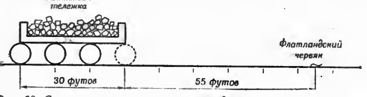


Рис. 98. Сколько колес переедет червяка?

тележки, ровно в пятидесяти футах от точки касания пунктирной окружности и прямой, находится астрийский червяк. Предположим, что он никуда не уползет. Сколько окружностей переедет через него?

Читателю рекомендуется сначала попытаться решить задачу в уме. Затем, взяв бумагу и карандаш, проверьте полученный ответ и, наконец, сравните его с ответом, приведенным в конце главы. Те, кому этой задачи покажется мало, могут попробовать обобщить ее для n колес, равноудаленных друг от друга. Как ни странно, размеры колес знать совсем не обязательно.

Говоря о трудностях «двумерного бытия», я заметил, что на плоскости не могут существовать тоннели, однако оказалось, что это не совсем так. Один из читателей сообразил, что крыша флатландского тоннеля может опираться на несколько дверей, подвешенных за верх на петлях. Идя по такому тоннелю, флатландец должен был бы каждый раз открывать по одной двери, а все остальные двери в это время поддерживали бы крышу. Правда, понадобился бы специальный механизм для того, чтобы все двери не могли открыться одновременно.

«Четвертое измерение» — так называется двенадцатая глава книги Флетчера Дюрелла «Математические приключения» *, в которой приводятся некоторые забавные рассуждения о жителях Тинландии ** — страны, во многом напоминающей Флатландию. Наличие двух глаз (одного на лбу, второго на подбородке) обеспечивает тинландцам бинокулярное зрение. Благодаря длинной шее они могут откидывать голову назад и видеть, что происходит у них за спиной. Когда женщине и мужчине надо при встрече обойти друг друга, мужчина обязан лечь на землю, чтобы женщина могла через него переступить. Помимо чисто механических трудностей жизни на плоскости, нельзя не сказать несколько слов и о тех трудностях, которые поджидают всякого, кто вознамерится воссоздать устройство мозга жителей Тинландии. Эти трудности обусловлены топологическими особенностями расположения кривых на плоскости. Как известно, мозг (обычного, «трехмерного») животного представляет собой фантастически сложное переплетение

* F. Durell, Mathematical Adventures, Boston, 1938.

** Thin (*англ.*) — тонкий.

нервных волокон в трехмерном пространстве. Воспроизвести нервную сеть на плоскости без самопересечений невозможно. Однако эта трудность не столь уж непреодолима, как может показаться на первый взгляд. Электрические импульсы вполне могут распространяться и по сети с самопересечениями, не сворачивая, так сказать, за угол на перекрестках.

О жене Буля, пяти его дочерях и их замечательных потомках рассказывается в статье Н. Гриджмэна «Похвала Булю» *. Мэри, жена Буля, в течение шестидесяти лет после смерти мужа «непрестанно писала о методах Буля и проповедовала их во многих областях науки, в том числе в теологии и этике, — пишет Гриджмэн. — Она была почти всецело поглощена мистикой алгебраической символики и размышлениями над ролью, которую играют в математике нуль и единица. В 1909 году Мэри Буль выпустила в свет книгу под названием «Философия и занимательное в алгебре», в которой настоятельно рекомендовала «тем, кто хочет... установить правильные взаимоотношения с Неизвестным», создавать на основе булевых методов свои собственные алгебры.

Говард Эверест Хинтон, внук Чарлза Хинтона и Мэри, старшей дочери Буля, стал известным британским энтомологом. Внучка Джоан стала физиком. Джеффри Тэйлор, сын Маргарет, второй дочери Буля, стал известным математиком и работает в Кембридже. О третьей дочери, Алисии, уже вкратце рассказывалось. Люси, четвертая дочь Буля, сейчас профессор химии в Королевском свободном госпитале в Лондоне. Самая младшая дочь Буля, Этель Лилиан, вышла замуж за польского ученого-эмигранта Вильфрида Войнича. В юности она написала роман «Овод». После первой мировой войны семья Войнич переехала из Лондона в Манхэттен. В 1960 году Этель скончалась на девяносто шестом году жизни.

ОТВЕТЫ

На рис. 99 показано, как надо пересечь единичный куб плоскостью, чтобы в сечении получилась фигура максимальной площади. Заштрихованное сечение

* *New Scientist*, № 420, December 3, 1964, pp. 655—657.

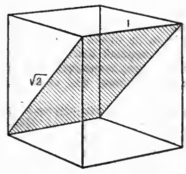


Рис. 99. Ответ к задаче о сечении куба плоскостью.

представляет собой прямоугольник, площадь которого равна $\sqrt{2}$, или 1,41... .

Куб можно разрезать и так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник, но тогда его площадь будет всего лишь 1,29... (ребро куба считается равным 1).

Ответ к задаче с тележкой: плоского червяка переедет всего одна окружность. Если имеется n равноудаленных друг от друга колес и число n четно, то число окружностей, которые переедут через червяка, в какой бы точке прямой он ни находился (если только червяк уже не стал жертвой несчастного случая, то есть не попал под колесо), равно $^n/_2$. Ситуация усложняется, если n — число нечетное. Весь путь от переднего колеса до червяка надо тогда разбить на равные отрезки, длина которых равна расстоянию между центрами соседних окружностей. Если червяк лежит либо на самом первом отрезке перед тележкой, либо через нечетное число отрезков от него, то число окружностей, которые переедут червяка, равно $(^n/_2 + {}^1/_2)$. Если же червяк лежит на любом из оставшихся отрезков, то число таких окружностей равно $(^n/_2 - {}^1/_2)$. Мы опять предполагаем, что червяк еще не попал под колесо. Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что мы пренебрегаем «граничными условиями».

Читатели, решавшие эту задачу, должны были заметить, что тележка движется относительно земли в два раза быстрее, чем колесо, вращающееся под ней, то есть за то время, что колесо проходит расстояние x, тележка проедет расстояние, равное $2x$. По такому же принципу работают иногда двери лифта: одна из них открывается в два раза быстрее другой и успевает за одно и то же время пройти в два раза большее расстояние.

ГЛАВА 18

СЪЕЗД ФОКУСНИКОВ В ЧИКАГО

Каждое лето, обычно в июле, тысячи членов (воображаемого) братства американских фокусников собираются на свой ежегодный съезд в Чикаго. В течение трех дней и ночей в фойе отеля, где останавливаются участники съезда, мелькают, исчезая и вновь появляясь, игральные карты, со звоном падают неизвестно откуда монеты, сами собой разрезаются и вновь восстанавливаются веревки, летают голуби, исчезают клетки с птицами, а иногда даже одна или две девушки.

Я решил отправиться на съезд фокусников по двум причинам. Во-первых, я сам очень люблю показывать фокусы, во-вторых, я надеялся почерпнуть там что-нибудь новенькое для редактируемого мной отдела в *Scientific American*. Многие математики в свободное от работы время с удовольствием показывают фокусы, а многие фокусники проявляют живой интерес к математике. В результате возникла матемагия — один из наиболее ярких разделов занимательной математики.

В фойе верхнего этажа развернулась своеобразная ярмарка: человек двадцать фокусников развесили в небольших палатках свои «товары». Я остановился перед палаткой, в которой Великий Джаспер (псевдоним, под которым выступает на эстраде один чикагский фокусник) демонстрировал известный номер — «падающие» кольца. Выглядит этот фокус так. Цепочку хитроумно сплетенных между собой колец (рис. 100) берут левой рукой за верхнее кольцо. Сразу под ним расположатся два других кольца. Большим и указательным пальцами правой руки фокусник берется за заднюю часть правого кольца так, как показано на рис. 100. Когда фокусник разжимает пальцы левой руки, кажется, будто верхнее кольцо, перепрыгивая с одного звена цепочки

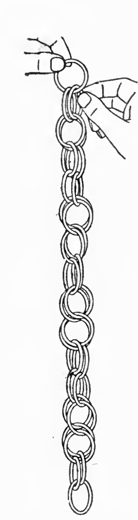


Рис. 100. «Падающие» кольца.

на другое, опускается вниз и повисает, зацепившись за нижнее кольцо.

Фокус можно продолжить. Для этого большим и указательным пальцами левой руки следует взяться за переднюю часть левого из колец, висящих на самом верхнем кольце (которое фокусник теперь держит в правой руке). Когда фокусник разожмет пальцы правой руки, вы увидите, как верхнее кольцо начнет падать вниз, не пропуская по дороге ни одного звена цепи.

— Смогут ли мои читатели самостоятельно изготовить такую цепочку? — сказал я.

— А почему бы нет? — удивился Джаспер. — Кольца для ключей можно купить в магазине, а имея тридцать колец и крепкие ногти, ничего не стоит за двадцать минут сделать такую цепочку. Не говорите только другим фокусникам, что я это сказал.

Джаспер был прав. Кольца для ключей оказались великолепным материалом для цепочки. Если же вы захотите сберечь ногти, попытайтесь разжимать витки колец оборотной (тупой) стороной лезвия ножа. Слегка повернув лезвие, вы сможете держать кольцо открытым до тех пор, пока другое кольцо не проскользнет в образовавшуюся щель. Удобнее всего начать с верхнего кольца, повесив его на гвоздик, и прицеплять к нему все остальные, следуя рисунку. Если все сделано правильно, кольца будут падать с приятным легким звоном.

Пока я разговаривал с Джаспером, к нам подошел Фитч Чиин, математик из Хартфордского университета.

— Если вас интересуют фокусы, основанные на завязывании узлов или сцеплении колец, то я изобрел один фокус, который может понравиться вашим читателям.

С этими словами Чиин достал из кармана длинный кусок мягкой веревки. Джаспер и я взяли ее за концы и, зацепив указательным пальцем левой руки, придали ей Z-образную форму (рис. 101, *а*), Чиин вынул из кармана шелковый платок и, охватив им веревку, сначала туго завязал его простым узлом, а затем, продев концы платка сквозь веревочные петли (рис. 101, *б*), завязал внизу двойной узел (рис. 101, *в*).

— Теперь выньте ваши указательные пальцы из петель и натяните веревку.

Мы повиновались (результат показан на рис. 101, *г*). Чиин повернул платок на 180°, так что узел оказался сверху.

— Странно, — сказал он. — Хотя платок охватывал веревку и был завязан в тугой узел, веревка теперь оказалась почему-то снаружи замкнутой кривой, образованной платком.

С этими словами он потянул платок вверх и снял его с веревки (рис. 101, *д*). Проделайте фокус сами, и вы убедитесь, что у вас он тоже всегда будет получаться.

Незадолго перед обедом фокусники собрались в коктейль-холле. У бара я заметил своего старого знакомого — банкомета из Лас Вегаса по прозвищу Ник Ставлю-Никель *. Он был известен как человек, тщательно следящий за всеми новинками в карточных фокусах. (Свое прозвище Ник Ставлю-Никель получил за манеру заключать пари на пять центов. Все знали, что он плутует и его партнера всегда ожидает какой-то подвох, но кто побоится рискнуть пятью центами? Стоило пожертвовать монеткой только из одного интереса.)

— Какое-нибудь новое пари, Ник? — спросил я. — Желательно что-нибудь, связанное с теорией вероятностей, и чтобы спор решали не отходя от стойки.

* Никель — монета в 5 центов.

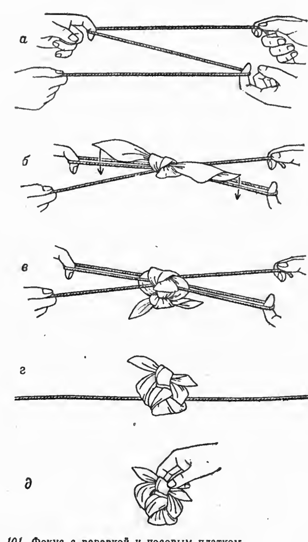


Рис. 101. Фокус с веревкой и носовым платком.

Ник положил на стойку рядом со своим стаканом пива монету.

— Если я немного приподниму монетку над стойкой и брошу ее, то с вероятностью $1/2$ она упадет вверх решеткой и с вероятностью $1/2$ — вниз. Правильно?

— Правильно, — согласился я.

— Ставлю никель, — сказал Ник, — что монетка упадет на ребро и так и останется стоять на ребре.

— Идет, — кивнул я.

Ник окунул монетку в пиво, приложил к стакану снаружи и дал ей соскользнуть вниз. Монетка благополучно опустилась на поверхность стойки и осталась стоять на ребре у стенки стакана, удерживаемая силой сцепления пива. Я вручил Нику пять центов. Все засмеялись.

Ник оторвал от коробки сигарет узкую полоску картона и сделал на одной стороне пометку карандашом.

— Если я брошу эту полоску на стойку, то с вероятностью $1/2$ она упадет помеченной стороной вверх. — Ставлю никель, — продолжал он, — что полоска упадет на ребро так же, как монетка.

— Принимаю пари, — ответил я.

Ник бросил полоску, но предварительно перегнул ее в виде латинской буквы V. Разумеется, она упала на ребро, и я потерял еще пять центов.

Какой-то незнакомец протиснулся к стойке и вынул из кармана маленький пластмассовый волчок.

— Вы видели когда-нибудь переворачивающийся волчок? — спросил он. — Ставлю никель, что если закрутите его, то он перевернется, встанет на ножку и будет продолжать крутиться на ней, пока не остановится.

— Не выйдет, — ответил Ник. — Я сам купил переворачивающийся волчок *. Но ставлю никель, что вы не сможете предсказать, в каком направлении будет вращаться волчок после того, как он перевернется и встанет на ножку.

Человек с волчком закусил губу и задумчиво сказал:

— Давайте подумаем. Я запускаю его по часовой стрелке. Когда он поворачивается, то направление вращения относительно его собственной оси сохраняется

* Элементарную теорию переворачивающегося волчка можно найти в журнале «Наука и жизнь», № 7, 1969. — *Прим. ред.*

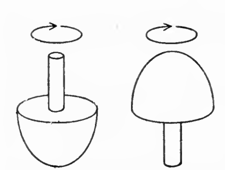


Рис. 102. Переворачивающийся волчок.

неизменным. В то же время концы оси после переворота меняются местами. Но если концы оси поменялись местами, то, глядя на волчок сверху, мы увидим, что его направление вращения изменилось на противоположное. Итак, после того как волчок перевернется и встанет на ножку, он будет вращаться против часовой стрелки.

С этими словами он с силой запустил свой волчок. Через мгновение тот перевернулся. Ко всеобщему изумлению, волчок продолжал вращаться по часовой стрелке (рис. 102). Купив в магазине игрушек такой волчок, читатель сможет убедиться в этом сам.

После банкета и вечернего представления участники съезда разошлись по номерам, чтобы поделиться последними новостями, профессиональными секретами и вообще поговорить о своем искусстве. Я с трудом разыскал комнату, в которой собирались «матемаги», фокусы которых основаны не столько на ловкости рук, сколько на тех или иных математических принципах. Я вошел как раз в тот момент, когда мой старый друг из Виннипега Мел Стоувер объяснял, каким образом с помощью двоичной системы счисления можно угадывать заранее задуманную карту.

Во многих карточных фокусах задуманную карту отгадывают так. Зрителю вручают колоду карт и просят, сняв верхнюю карту, переложить ее в низ колоды. Затем снять следующую карту и выложить ее на стол. Очередную верхнюю карту снова положить в низ колоды, следующую за ней — снова выложить на стол, и т. д. до тех пор, пока в руках у зрителя не останется однаединственная карта. Она-то и оказывается задуманной. В каком месте исходной колоды должна находиться задуманная карта, чтобы в конце она оказалась последней, оставшейся в руках зрителя? Положение задуманной карты в колоде, разумеется, зависит от толщины

колоды, и ее место можно найти путем подбора. Однако для больших колод подобный экспериментальный метод чрезвычайно неудобен. К счастью, как объяснил Стоувер, двоичная система счисления позволяет без труда дать ответ, где должна находиться задуманная карта.

Вот как это делается. Запишем число карт в колоде в двоичной системе и перенесем единицу старшего разряда в конец числа. Число, которое получится в результате такой операции, совпадает с номером того места, на котором должна находиться задуманная карта, если считать по порядку, начиная с самой верхней карты в колоде. Предположим, например, что фокусник взял полную колоду из 52 карт. В двоичной системе число 52 запишется как 110100. Перенесем единицу старшего разряда в конец: 101001. В десятичной системе это число равно 41, следовательно, задуманная карта должна быть сорок первой, считая сверху.

Сколько карт должно быть в колоде, если мы хотим, чтобы последней осталась самая верхняя карта? Поскольку двоичная запись номера карты имеет вид 1, число карт в колоде может выражаться двоичными числами 10, 100, 1000, 10000, ... (или, в десятичной системе, 2, 4, 8, 18, ...). Если требуется, чтобы в руках у зрителя осталась нижняя карта, то в колоде должно быть 11, 111, 1111, 11111, ... карт (число карт записано в двоичной системе), или, в более привычных десятичных обозначениях, 3, 7, 15, 31, ... карт.

Может ли остаться вторая карта сверху? Нет. Более того, последняя карта никогда не может находиться на четном месте (считая сверху): порядковый номер карты, выраженный в двоичной системе, должен непременно заканчиваться единицей (поскольку старшая цифра числа, заведомо равная 1, была передвинута в конец), а все двоичные числа, оканчивающиеся цифрой 1, нечетные.

Затем слово взял Виктор Айген, о котором мы уже рассказывали в первой книге. Он показал замечательный новый фокус, связанный с кодированием информации.

— Я хочу заранее объяснить, что намерен сделать, — заявил он. — Каждый из присутствующих может перетасовать свою собственную колоду карт и выбрать из нее любые пять карт. Из пяти выбранных карт он должен оставить себе одну. Остальные четыре карты я имею

право как угодно перекладывать. Взяв у кого-нибудь из вас эти четыре карты, я сложу их вверх рубашкой и верну владельцу, чтобы тот отнес эти карты в мой номер. В номере находится моя жена, которая будет мне ассистировать. Вы трижды постучитесь в дверь номера и подсунете принесенные карты под дверь, по-прежнему держа их рубашкой вверх. Ни вы, ни жена не произнесут ни слова. Изучив переданную ей тоненькую колоду, жена назовет отобранную карту.

Я попросил разрешения, чтобы фокус проверили на мне. Строго следуя инструкциям Айгена, я отобрал из своей колоды пять карт и вынул из них шестерку пик. Айген даже не прикоснулся к картам: он хотел исключить всякие подозрения, будто он незаметно помечает карты и таким образом передает жене дополнительную информацию. Верх и низ рисунка рубашки незначительно различаются, поэтому, варьируя верх и низ четырех карт, в принципе можно было бы передавать довольно большой объем информации. Если бы карты вкладывались в конверт, то объем передаваемой информации увеличился бы еще больше, так как можно было бы одни карты вкладывать вверх лицом, другие — вверх рубашкой, запечатывать конверт или оставлять его незапечатанным и т. д. Даже то обстоятельство, лежат ли карты в конверте или их передали без него, могло бы служить указанием на оставшуюся карту. Если бы Айген имел право выбирать ассистента для передачи карт жене, то этот выбор мог бы служить кодом: Айген мог бы выбирать блондинов или брюнетов, женатых и холостых, лиц, фамилия которых начинается с буквы, принадлежащей первой или второй половине алфавита, и т. д. Жена его могла бы подсматривать за теми, кто отбирает карты. То, что Айген заранее объявил все свои действия и совершенно не прикасался к моим картам, полностью исключало все эти возможности.

Я переложил оставшиеся у меня четыре карты в указанном Айгеном порядке и, узнав номер его комнаты, собрался уже отправиться туда, чтобы подсунуть карты под дверь, как вдруг поднялся Мел Стоувер.

— Минутку, — сказал он. — Откуда мы знаем, что Айген не передает нужную информацию, выбирая момент времени, когда вы постучите в его комнату? Делая вид, что он дает пояснения, Айген на самом деле

мог оттягивать этот миг до тех пор, пока не наступит определенный интервал времени, заранее обусловленный между ним и его женой и являющийся поэтому частью кода.

Айген покачал головой.

— Никакого временно́го кода нет. Если угодно, можете подождать. Пусть Гарднер сам выберет, когда ему выходить из комнаты.

Мы подождали около пятнадцати минут, с восторгом наблюдая великолепные карточные фокусы Эда Марло. Затем я отправился к номеру Айгена, постучал три раза и, держа карты вверх рубашкой, подсунул их под дверь.

Послышались шаги, и четыре карты скрылись из виду. Через мгновенье, не больше я услышал голос миссис Айген.

— Вы оставили себе шестерку пик.

Каким образом Айген сумел передать эту информацию своей жене?

ОТВЕТЫ

Я так и не смог проследить происхождение фокуса с падающими кольцами или хотя бы приблизительно установить дату его изобретения. Иногда цепочку делают из колец двух различных цветов. Отпустив кольцо одного цвета (например, красное), вы увидите, как оно быстро «упадет» вниз и останется висеть, зацепившись за нижнее звено цепи. Если у фокусника до начала опыта в одной руке будет зажато кольцо одного цвета, а в другой — другого (оба кольца не сцеплены между собой и с цепью), то он сможет делать вид, будто «подхватывает» падающее кольцо и «снимает» его с цепочки.

Один из наших читателей обнаружил удобный способ составления цепочки. Начинает он с колец, сцепленных обычным образом и образующих цепочку 1-2-1-1. Затем нижнее кольцо сцепляется в соответствии с рис. 100 с предпоследним кольцом, в результате чего получается цепочка 1-2-2. К ней он прицепляет еще два кольца, что дает цепочку 1-2-2-1-1, а затем нижнее кольцо сцепляет с предпоследним так, как показано на рис. 100, и снова навешивает два кольца 1-1. Эту процедуру можно повторять столько раз, сколько нужно.

Двончиый метод определения иомера задуманной карты в колоде из n карт (задумаииая карта долживна остаться последией в руке показывающего фокус, если он будет попеременио выкладывать по одиой карте на стол и класть по одиой карте под иих колоды) был опубликоваи в 1950 году *. Эквивалеитиый способ вычислеиия иомера карты был известеи фокусиикам иамного раньше: иужио просто вычесть из n (числа карт в колоде) наивысшую степеиь двойкн, ие превосходящую n, и удвоить результат. Еслн первая карта выкладывается иа стол, то получеииое чнсло совпадает с иомером задумаиной карты. Если же первая карта подкладывается под колоду, то к получеиному числу иеобходнмо еще прнбавить 1. (Еслн же число n само есть степеиь 2, то задумаииая карта должиа быть верхней картой в колоде в тех случаях, когда первую карту подкладывают под колоду, и иижней — когда первую карту выкладывают на стол.)

Попросите кого-ибудь тщательио перетасовать карты и передать вам всю колоду. Держа карты веером перед собой картинками к себе, вы заявляете, что можете зараиее угадать, какая карта остаиется в руках у зрителя. Заметьте верхнюю карту в колоде н, запнсав ее названне иа листке бумаги, отложнте его в стороиу, следя за тем, чтобы ннкто ие мог подсмотреть, какую карту вы предсказали. Предположим, что верхней картой была двойка червей.

Возьмите колоду в левую руку картиниками винз. Попросите зрителя иазвать любое чнсло от 1 до 52. Чтобы фокус был нитересией, желательио иметь число больше 10. Пусть зритель иазвал чнсло 23. Мыслеино вычтите из иазваиного чнсла иаивысшую степеиь двойки, ие превосходящую его (в иашем случае $23 - 16 = 7$), н удвойте разность ($7 \times 2 = 14$). Теперь вам иужио, чтобы двойка червей оказалась в колоде из 23 карт иа четырнадцатом месте сверху. Делается это так. Начиите отсчитывать карты по одной сверху, сдвигая нх большим пальцем правой руки. Отсчнтаиные карты собнрайте в правой руке. Поскольку оин ложатся одна иа другую, их порядок меияется иа обратиый. Отсчнтав 14 карт, остаиовнтесь н спроснте у зрителя, делая вид, что вы забыли:

— Какое число вы иазвали?

*American Mathematical Mouthly, August — September 1950.

Когда он скажет вам: «Двадцать три», — кивните головой и продолжайте счет, однако на этот раз карты нужно сдвигать вправо большим пальцем левой руки так, чтобы они соскальзывали под ту пачку карт, которую вы уже держите в правой руке. Когда вы отсчитаете 23 карты, двойка червей окажется в точности на четырнадцатом месте сверху. Ваша пауза и вопрос разбивают весь счет на два этапа, но вряд ли кто-нибудь из зрителей заметит, что вы по-разному откладываете отсчитанные карты до и после вопроса. Вручите колоду из 23 карт зрителю и попросите его выложить первую сверху карту на стол, вторую подложить под низ оставшейся у него в руках колоды из 22 карт, третью снова выложить на стол и т. д. до тех пор, пока в руках у него не останется одна карта. Вряд ли нужно говорить, что это будет именно та карта, которую вы предсказали.

На подобной идее основан и другой фокус. Я приведу его в несколько упрощенном варианте. Отберите из колоды 4, 8, 16 или 32 карты, Предположим, что вы взяли 16 карт. Повернитесь спиной к зрителям и попросите кого-нибудь из них взять небольшую пачку карт (их должно быть меньше 16) из колоды и держать ее в руках, не сообщая вам, сколько карт он взял. Пусть в пачке у зрителя n карт. Развернув веером 16 карт картинками к зрителю, попросите его запомнить n-ю карту сверху (разумеется, не сообщая вам ни номера n, ни названия карты). Сложите ваши карты в пачку и положите поверх ее ту пачку, которую отобрал зритель. Замеченная им карта автоматически окажется на $2n$-м месте, считая сверху, в колоде из $16+n$ карт. Следовательно, если вы будете по очереди выкладывать карты по одной на стол и подкладывать под низ объединенной колоды, то последняя карта в ваших руках будет та, которую запомнил зритель.

Другой фокус показывается так. Зритель тасует колоду из 2^n карт (например, из 32 карт). Затем его просят задумать любое число от 1 до 15 и спрятать в карман число карт, равное задуманному. Фокусник в это время стоит к зрителю спиной. Затем фокусник поворачивается, берет оставшиеся карты и выкладывает их на стол рубашкой вверх, показывая зрителю каждую карту. Мысленно зритель отмечает карту, номер которой совпадает с задуманным им числом. После того как все карты

выложены на стол (при этом их порядок, разумеется, изменился на обратный), вся колода вручается второму зрителю, который должен проделать уже известную процедуру: начать по очереди то выкладывать верхнюю карту на стол, то подкладывать ее снизу. Оставшаяся у него в руке последняя карта и будет той, которую заметил первый зритель.

Тот же фокус можно показывать иначе. Зритель тасует колоду из 2^n карт и затем раскладывает карты на столе в две кучки. Число карт в обеих кучках должно быть одинаковым, а в остальном произвольным. Зритель может на выбор взять любую из кучек или оставить себе те карты, которые он держит в руке. Если он выбирает одну из кучек на столе, то должен заметить верхнюю карту, а затем положить всю кучку поверх тех карт, которые находятся у него в руке. Первую карту «расширенной» колоды он подкладывает вниз, вторую выкладывает на стол, третью снова подкладывает под колоду и т. д. Последней картой в его руках будет замеченная им карта. Если же он выберет ту колоду карт, которая находится у него в руках, то запомнить нужно нижнюю карту. Подложив снизу любую из кучек и проделав обычную процедуру: верхнюю карту — на стол, следующую — под колоду и т. д., он обнаружит, что последняя карта у него в руках совпадает с замеченной.

Проблема отыскания места карты в фокусах этого типа является частным случаем более общей задачи, известной любителям занимательной математики под названием проблемы Джозефуса. На ней основаны многие старые головоломки. Формулируется проблема Джозефуса следующим образом. Группа людей выстроена по кругу. Всех их, кроме одного, должны казнить. Палач начинает считать по кругу и казнит каждого n-го человека до тех пор, пока не останется лишь один человек, которого отпускают на свободу. Где должен встать человек, если он хочет избежать казни? При $n = 2$ мы имеем карточную ситуацию. История проблемы Джозефуса и некоторые ее обобщения описаны в книге У. У. Роуза-Болла*.

Поскольку ни одна из четырех подсунутых под дверь карт не может быть отобранной, фокуснику необходимо

* W. W. Rouse-Ball, Mathematical Recreation and Essays, N. Y., 1960.

закодировать лишь название одной из 48 карт. Фокусник и его ассистент заранее условливаются о том, в каком порядке должны идти все 52 карты, и каждую карту сопоставляют с ее номером. Четыре переданные ассистенту карты несут в себе зашифрованное сообщение: четыре числа, которые мы обозначим A, B, C и D. Перестановки четырех карт дают ровно 24 комбинации, то есть ровно половину 48. Сорок восемь карт (одна из которых должна быть зашифрована) фокусник мысленно считает расположенными по порядку номеров и делит пополам: одна половина состоит из 24 «низших» карт, вторая — из 24 «высших». Предположим, что отобрана семнадцатая карта из «низшей» группы. Число 17 можно сообщить ассистенту с помощью выбора надлежащей перестановки четырех карт, но один дополнительный сигнал необходим еще для того, чтобы уточнить, из какой именно половины — «низшей» или «высшей» — взята семнадцатая карта.

Итак, задача сводится к тому, чтобы передать один сигнал типа «да — нет». Перестановкой карт мы ничего добиться не сможем: их всего 24, и они все «заняты» передачей номера карты. По условиям проведения фокуса все способы подсказки с помощью пометок на картах, выбора лица, доставляющего карты ассистенту, конверта, времени вручения карт и т. д. отпадают.

Однако одна лазейка все же остается: комната отеля, в которой находится миссис Айген. Семья Айгенов сняла номер из двух смежных комнат. Виктор Айген называет номер на двери комнаты лишь после того, как карта отобрана. Остальные четыре карты он располагает в такой последовательности, чтобы соответствующая перестановка указывала номер карты. Выбор же половины — «высшей» или «низшей» — однозначно определяется выбором номера комнаты. Услышав стук в дверь, миссис Айген переходит в нужную комнату, а взяв карты, узнает, какая карта была отобрана.

ГЛАВА 19

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

На долларовой бумажке, которую я только что вынул из кошелька, стоит номер 61671142. Любой школьник сразу же скажет, что это число делится на 2, но не делится на 5. Делится ли оно на 3? А на 4? На 11? (Говоря о том, что число «делится», мы имеем в виду, что оно делится без остатка.) Мало кто знает (даже если мы обратимся к математикам) простые правила, позволяющие быстро проверить делимость больших чисел на числа от 2 до 12. Между тем эти правила были широко известны в эпоху Возрождения, поскольку, пользуясь ими, можно было приводить дроби с большими числителями и знаменателями к несократимому виду. Знать их полезно даже в наши дни. Для тех, кто увлекается решением цифровых головоломок, неоценимое значение имеют следующие признаки делимости.

Признак делимости на 2. Число делится на 2 в том и только в том случае, если его последняя цифра четная.

Признак делимости на 3. Вычислите сумму цифр интересующего вас числа. Если эта сумма выражается более чем однозначным числом, найдите сумму цифр полученной суммы, и т. д. до тех пор, пока вы не придете к однозначному числу, которое мы назовем цифровым корнем исходного числа. Если цифровой корень кратен 3, то исходное число делится на 3. Если же цифровой корень не кратен 3, то нужно установить наибольшее из чисел 0, 3 и 6, которое не превосходит цифрового корня. Взяв разность между цифровым корнем и найденным числом, мы узнаем остаток от деления на 3 исходного числа. Например, номер долларовой бумажки имеет цифровой корень, равный 1. Это означает, что остаток при делении номера на 3 равен 1.

Признак делимости на 4. Число делится на 4 в том и только в том случае, если две его последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4. (Это нетрудно понять, если учесть, что число 100 и кратные ему числа делятся на 4.) Номер долларовой бумажки оканчивается цифрами 42. Поскольку число 42 при делении на 4 дает остаток 2, номер долларовой бумажки при делении на 4 также даст остаток 2.

Признак делимости на 5. Число делится на 5 в том и только в том случае, если оно оканчивается на 0 или на 5. Если число не делится на 5, то его последняя цифра либо меньше 5 (но больше 0), либо больше 5. В первом случае остаток от деления числа на 5 равен его последней цифре, во втором — разности между последней цифрой и 5.

Признак делимости на 6. Нужно проверить делимость интересующего нас числа на 2 и на 3 (то есть на делители числа 6). Число делится на 6 в том и только в том случае, если оно четное, а его цифровой корень делится на 3.

Признак делимости на 8. Число делится на 8 в том и только в том случае, если его последние три цифры образуют число, делящееся на 8. (Справедливость этого признака следует из того, что все числа, кратные 1000, делятся на 8.) В противном случае остаток от деления на 8 числа, образованного последними тремя числами, совпадает с остатком от деления на 8 исходного числа. (Аналогичное правило справедливо для любой степени двойки 2^n: число делится на 2^n в том и только в том случае, если число, образованное n его последними цифрами, делится на 2^n.)

Признак делимости на 9. Число делится на 9 в том и только в том случае, если его цифровой корень равен 9. В противном случае цифровой корень совпадает с остатком от деления исходного числа на 9. Номер долларовой бумажки имеет цифровой корень, равный 1, следовательно, остаток от деления номера на 9 равен 1.

Признак делимости на 10. Число делится на 10 в том и только в том случае, если оно оканчивается на 0. В противном случае последняя цифра дает остаток от деления числа на 10.

Признак делимости на 11. Двигаясь справа налево, будем попеременно приписывать цифрам нашего

числа знаки плюс и минус (последняя цифра берется со зиаком плюс, предпоследняя — со зиаком мииус и т. д.), после чего вычислнм сумму всех цифр (каждую цифру следует брать с ее зиаком). Исходное число делится на 11 в том н только в том случае, если получениая сумма делится на 11 (чнсло 0 счнтается делящимся на 11). Для номера долларовой бумажки $2 - 4 + 1 - 1 + 7 - 6 + {} + 1 - 6 = 6$. Поскольку полученная сумма не кратна 11, исходиое число — номер — ие делнтся на 11. Чтобы иайтн остаток от деления числа на 11, рассмотрим все ту же сумму его цифр, взятых с переменными зиаками. Если эта сумма меньше 11 н положительиа, то она совпадает с остатком. Если же сумма больше 11, то ее нетрудно свести к числу, меньшему 11, поделив на 11 и взяв остаток. Если последний положителеи, то он совпадает с остатком от деления на 11 исходного чнсла. Если же он отрицателен, прибавьте к нему 11. (В примере с номером долларовой бумажки $-6 + 11 = 5$. Это озиачает, что иаш номер при делении на 11 дает в остатке 5).

Признак делимости иа 12. Проверьте делимость ннтересующего иас чнсла на 3 и 4 — делнтелн 12. Число делится на 12 в том н только в том случае, если оно делится одновремеиио и на 3, и иа 4.

Читатель уже, коиечно, заметил одну особенность приведенного выше списка признаков делимости — в нем иет признака делимости иа 7, волшебное число средневековой нумерологии. Семерка — единственное число, для которого до сих пор не удалось найти простого признака делимости. Столь иеобычное поведение семерки уже давно обратнло на себя виимание тех, кто занимается теорией чисел. Было предложено миожество весьма любопытиых и на первый взгляд ие связаииых между собой признаков делимости на 7. К сожалению, большинство из них требует ничуть ие меньшнх затрат времеин, чем обычное («честное») деление на 7.

Один из самых старых признаков делнмостн на 7 состоит в следующем. Цифры числа нужно брать в обратном порядке, справа иалево, умножая первую цифру иа 1, вторую иа 3, третью на 2, четвертую иа 6, пятую на 4, шестую иа 5 и т. д. (если число знаков больше 6, последовательиость множителей 1, 3, 2, 6, 4, 5 следует повторять столько раз, сколько нужно). Полученные произведения нужно сложить. Исходное число делится на 7 в

том и только в том случае, если вычислеииая сумма делится иа 7. Если же эта сумма ие делится иа 7, то разиость между ией и ближайшим не превосходящим ее кратиым семи даст остаток от делеиия исходиого числа иа 7. Вот, иапример, что дает этот призиак для иомера долларового билета:

$$
\begin{array}{r}
2 \times 1 = 2 \\
4 \times 3 = 12 \\
1 \times 2 = 2 \\
1 \times 6 = 6 \\
7 \times 4 = 28 \\
6 \times 5 = 30 \\
1 \times 1 = 1 \\
6 \times 3 = 18 \\
\hline
99
\end{array}
$$

Число 99 при делеиии иа 7 дает остаток 1. Следовательио, остаток от делеиия иомера долларовой бумажки иа 7 равеи 1. Выкладки можио ускорить, если воспользоваться «вычеркиваиием семерок» из получающихся произведеиий: вместо 12 писать 5, вместо 28 — иуль и т. д. Сумма произведеиий после вычеркиваиия семерок будет равиа не 99, а лишь 22. В действительиости этот призиак делимости на 7 представляет собой ие что ииое, как метод вычеркиваиия чисел, кратных 7, из исходиого числа. Осиован ои иа том, что последовательиые степеии числа 10 сравиимы (по модулю 7) с числами 1, 3, 2, 6, 4, 5; 1, 3, 2, 6, 4, 5; ..., образующими повторяющуюся последовательиость. (Числа иазываются сравиимыми по модулю k, если при делеиии иа k они дают одииаковые остатки.) Вместо чисел 6, 4, 5 можио взять сравиимые с иими (по модулю 7) числа —1, —3, —2. Интересующийся читатель иайдет подробиое объясиеиие в главе о сравиеииях киеги Ф. Кураита и Г. Роббииса «Что такое математика?» *. Коль скоро осиовиая идея ясиа, иетрудио придумать аиалогичиые призиаки делимости и иа любые другие числа (Блез Паскаль поиял это еще в 1654 году). Например, чтобы вывести призиак делимости иа 13, мы должиы лишь обратить виимаиие иа то, что последовательиые степеии 10 сравиимы (по модулю 13) с члеиами периодического ряда 1, —3, —4, —1, 3, 4, ... Чтобы убе-

* Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика?, Изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967.

диться, делится ли интересующее нас число на 13, мы должны произвести над его цифрами те же действия (умножив их предварительно на 1, —3, —4, —1, 3, 4, ...), какие производили при проверке делимости на 7.

Возникает вопрос: на что следует умножать цифры числа при проверке его делимости на 3, 9 и 11? Степени числа 10 сравнимы (по модулю 3 и по модулю 9) с числами 1, 1, 1, ..., поэтому мы тотчас приходим к уже известным признакам делимости на 3 и на 9. Если же взять модуль 11, то степени числа 10 окажутся сравнимыми с членами ряда —1, +1, —1, +1, ..., который также приводит к уже известному признаку делимости на 11. Отыскав последовательности коэффициентов для других делителей, читатель убедится, что каждый из полученных им рядов либо связан с уже известным признаком делимости, либо (например, для 6 и 12) приводит к новым признакам.

Примерно с середины прошлого века известен следующий весьма причудливый признак делимости на 7. Вычеркнем последнюю цифру у нашего числа и, удвоив ее, вычтем из того, что осталось. Эту процедуру будем повторять до тех пор, пока не получим однозначное число. Исходное число делится на 7 в том и только в том случае, если полученное однозначное число делится на 7. В применении к номеру долларовой бумажки этот признак делимости выглядит так:

6167114~~2~~
4
616711~~0~~
0
61671~~1~~
2
6166~~9~~
18
614~~8~~
16
59~~8~~
16
4~~3~~
6
—2

Последнее число не делится на 7, следовательно, исходное число также не делится на 7. Недостатком этого признака делимости следует считать то, что он не позволяет столь же просто находить остатки от деления чисел на 7.

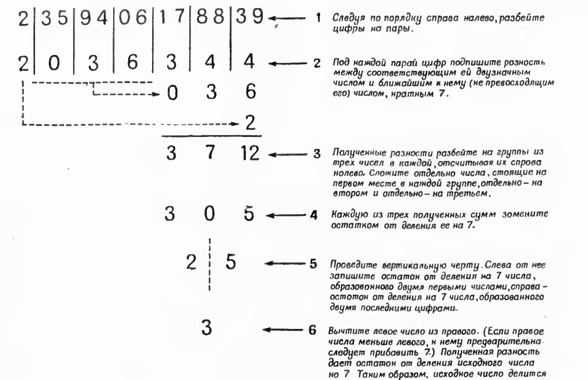


Рис. 103. Признак делимости на 7 (признак Лиоиса).

4	3	1	5	7	**А**
4	3	1	5	**Б**	6
4	3	1	**В**	7	6
4	3	**Г**	5	7	6
4	**Д**	1	5	7	6
Е	3	1	5	7	6

4	3	1	5	7	1
4	3	1	5	3	6
4	3	1	6	7	6
4	3	6	5	7	6
4	7	1	5	7	6
3	3	1	5	7	6

Рис. 104. Числовой фокус, основанный на признаке Лионса.

Признак делимости на 7, особенно пригодный при проверке очень больших чисел, предложил В. Лионс. Последовательность операций указана на рис. 103 на примере произвольного 13-значного числа. Метод особенно быстро приводит к ответу, если его применять к шестизначным числам: необходимо лишь вычислить три числа, затем два и, наконец, еще одно число, которое и служит ответом!

С помощью своего метода Лионс открыл множество замечательных фокусов с шестизначными числами, аналогичных тем, которые показывают на эстраде. Вот один из фокусов Лионса.

Попросите кого-нибудь написать мелом на доске любое шестизначное число, *не* делящееся на 7. Предположим, что написано число 431 576. Вы говорите, что можете быстро найти шесть новых чисел, кратных 7, каждое из которых будет отличаться от 431 576 лишь одной цифрой.

Для этого вы прежде всего переписываете число шесть раз подряд, располагая цифры в клетках квадратной таблицы. Последнюю клетку в первой строке, предпоследнюю во второй и т. д. вы оставляете пустыми (на рис. 104 эти клетки обозначены буквами от А до Е лишь для удобства объяснения; при выполнении фокуса эти шесть клеток остаются пустыми). Проверив с помощью признака Лионса делимость числа на 7, вы обнаружите, что его остаток от деления на 7 равен 5. Следовательно,

для того чтобы верхнее число делилось на 7, в клетке А должна стоять цифра 1 (вместо первоначальной цифры 6).

Теперь уже нетрудно быстро заполнить остальные клетки от Б до Е. Число, образованное двумя последними цифрами второй строки, имеет вид Б6. Над ним стоит число 71, дающее при делении на 7 в остатке 1 (напомним, что число, стоящее в первой строке, уже делится на 7). Следовательно, в клетку Б нужно вписать такую цифру, чтобы число Б6 при делении на 7 давало остаток 1. Вписав в клетку Б цифру 3, вы добьетесь желаемого результата. (Установить, что искомой цифрой служит именно 3, очень просто. Достаточно в уме вычесть 1 из 6 и спросить себя, какое двузначное число, оканчивающееся на 5, кратно 7. Ответом может быть лишь число 35.) Цифра, которую нужно вписать в клетку В, находится из аналогичных соображений. Над числом В7 расположено число 53, дающее при делении на 7 остаток 4. Чтобы число В7 при делении на 7 давало остаток 4, в клетку В нужно вписать цифру 6. Так же заполняются и остальные клетки. Окончательный результат показан на рис. 104 справа: шестизначное число, стоящее в каждой строке, делится на 7. Математику, прекрасно осведомленному о трудностях проверки делимости на 7, этот фокус кажется особенно удивительным. Аналогичный фокус с построением 6 чисел, делящихся на 9, был бы тривиальным.

Признаки делимости нередко позволяют находить изящные решения числовых задач, которые без них были бы чрезвычайно трудными. Рассмотрим, например, следующую задачу. Возьмем девять карточек, перенумерованных цифрами от 1 до 9, и тщательно их перетасуем. Какова вероятность того, что девятизначное число, образованное цифрами на разложенных в ряд карточках, будет делиться на 9? Поскольку сумма цифр от 1 до 9 равна 45, а число 45 делится на 9, вы сразу же знаете, что искомая вероятность равна 1 (событие достоверно). Возьмем теперь четыре карточки с цифрами от 1 до 4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, образованное цифрами на выложенных в случайном порядке карточках, будет делиться на 3? Зная признак делимости на 3, вы сразу же можете сказать, что эта вероятность равна 0 (событие невозможно).

Изящный фокус можно показать следующим образом. Вручите кому-нибудь девять карточек с цифрами от 1 до 9. Отвернувшись, попросите перетасовать в любом порядке карточки с цифрами от 1 до 4 и выложить из них четырехзначное число. Не оборачиваясь, вы можете утверждать, что полученное число не делится на 3. После этого попросите добавить к четырем карточкам пятую (с цифрой 5) и, перетасовав их, выложить пятизначное число. По-прежнему не оборачиваясь, вы можете с уверенностью утверждать, что на этот раз число делится на 3.

Прежде чем заглянуть в ответы, читатель может испытать свое искусство на следующих числовых задачах, имеющих непосредственное отношение к признакам делимости:

1. Человека старше 9 и моложе 100 лет просят написать число, выражающее его возраст, три раза подряд (например, 484848). Докажите, что получившееся число делится на 7.

2. Возьмем семь карточек с цифрами от 1 до 7, положим в чью-нибудь шапку и тщательно перемешаем. Затем разложим карточки в ряд, вытаскивая каждый раз из шапки по одной карточке. С какой вероятностью полученное семизначное число будет делиться на 11?

3. Найдите наименьшее целое число, дающее при делении на 2 остаток 1, при делении на 3 остаток 3, при делении на 4 остаток 3, при делении на 5 остаток 4, при делении на 6 остаток 5, при делении на 7 остаток 6, при делении на 8 остаток 7, при делении на 9 остаток 8 и при делении на 10 остаток 9.

4. У ребенка имеется n одинаковых деревянных кубиков. Из них он пытается сложить куб как можно большего размера, но обнаруживает, что ему не хватает ровно одного ряда кубиков, параллельного ребру большого куба. Докажите, что n делится на 6.

5. Чему равен остаток от деления на 7 числа 3 в степени 123 456 789?

6. Найдите четыре отличные от 0 цифры, из которых нельзя составить четырехзначное число, делящееся на 7.

Все задачи, за исключением последней, при надлежащем подходе оказываются намного проще, чем может показаться на первый взгляд. Читатель, взявший на себя труд решить все 6 задач, будет вознагражден

той «тренировкой», которую приобретет в элементарной теории чисел.

После опубликования в журнале статьи о признаках делимости я получил многочисленные письма от читателей.

Некоторые читатели предложили другие признаки делимости на 7, отличные от перечисленных мной. Приведу здесь лишь признак, встречавшийся в письмах читателей особенно часто. Этот старый и хорошо известный признак делимости основан на том обстоятельстве, что число 1001 (случайно совпадающее с числом сказок в сборнике «1001 ночь») равно произведению трех последовательных простых чисел 7, 11 и 13. Число, делимость которого требуется проверить, разбивается справа налево на трехзначные группы цифр. Например, число 61671142 разбивается на группы 61/671/142. Трехзначным числам, образуемым цифрами каждой группы, приписываются поочередно знаки плюс и минус, так что самое правое число имеет знак плюс, после чего их складывают: $142 - 671 + 61 = -148$. При делении на 7, 11 или 13 полученное число дает тот же остаток, что и исходное.

ОТВЕТЫ

1. Чтобы число вида ABABAB делилось на 7, достаточно заметить, что такое число есть произведение чисел AB и 10101. Поскольку множитель 10101 кратен 7, число ABABAB делится на 7.

2. Если цифры от 1 до 7 случайным образом выложены в ряд, то вероятность того, что получившееся число делится на 11, равна $^4/_{35}$. Вот как подсчитывается эта вероятность. Чтобы число делилось на 11, разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах и суммой цифр, стоящих на четных местах, должна быть либо равной 0, либо кратной 11. Сумма цифр от 1 до 7 равна 28. Нетрудно видеть, что удовлетворять признаку делимости на 11 могут лишь два разбиения числа 28: 13/14 и 25/3. Разбиение 25/3 следует отбросить потому, что сумма любых трех отличных от нуля цифр всегда больше 3. Итак, остается лишь разбиение 14/14. Существует 35 различных комбинаций из трех цифр, которые могут стоять на четных местах (обозначенных буквой B)

в числе ABABAB, у которого сумма цифр A, стоящих на нечетных местах, равна 14. Из них лишь 4 комбинации (а именно 167, 257, 347, 356) дают в сумме 14. Следовательно, вероятность того, что случайным образом составленное число делится на 11, равна 4/35.

3. Наименьшее число, дающее при делении на все числа от 2 до 10 остатки, которые на 1 меньше делителя, равно 2519. Любопытно заметить, что «профессор Хоффман» * в своей книге «Старые и новые головоломки» («Puzzles Old and New») (1893) относит эту задачу к числу «трудных» и отводит ее решению более двух страниц. Хоффман не заметил, что искомое число делится на все числа «почти нацело»: его остаток всегда на 1 меньше делителя. Следовательно, чтобы получить ответ, достаточно найти наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 (оно равно 2520), а затем вычесть 1.

4. Задача о построении куба с недостающим рядом маленьких кубиков эквивалентна следующей задаче: доказать, что число вида $n^3 - n$ (n — любое целое число) всегда делится на 6. Проще всего доказать делимость числа $n^3 - n$ на 6 можно следующим образом. Разложим $n^3 - n$ на множители:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1).$$

Из выражения, стоящего в правой части последнего равенства, видно, что число $n^3 - n$ равно произведению трех последовательных чисел. Какие бы три последовательных целых числа мы ни взяли, одно из них должно делиться на 3 и по крайней мере одно должно быть четным (разумеется, и первым и вторым свойством может обладать *одно и то же* число; таково, например, число 18 в тройке последовательных чисел 17, 18, 19). Поскольку 2 и 3 входят в число сомножителей, на которые разлагается произведение любых трех последовательных чисел, это произведение делится на 2×3, то есть на 6.

5. Остаток от деления на 7 числа 3, возведенного в степень 123456789, равен 6. Ответ нетрудно получить, если заметить, что остатки от деления на 7 последовательных степеней тройки образуют бесконечную перио-

* Псевдоним Анджело Льюиса. — *Прим. перев.*

дическую последовательность. Период состоит из 6 чисел: 3, 2, 6, 4, 5, 1. Поскольку остаток от деления показателя степени 123456789 на 6 равен 3, мы должны взять третье из шести чисел. Оно равно 6, что и дает ответ задачи.

Остатки от деления на 7 последовательных степеней любого числа образуют периодическую последовательность. Для чисел, сравнимых по модулю 7, эти периодические последовательности совпадают. Любая степень числа, сравнимого с 1 по модулю 7, при делении на 7 даст остаток, равный 1. Степени чисел, сравнимых с 2 по модулю 7, образуют последовательность, состоящую из повторяющихся циклов 2, 4, 1. Для чисел, сравнимых по модулю 7 с 3, цикл уже был указан, для 4 цикл состоит из 4, 2, 1; для 5 — из 5, 4, 6, 2, 3, 1; для 6 — из 6, 1; для 7 — разумеется, из одного нуля.

Чему равен остаток при делении на 7 числа 123456789, возведенного в степень 123456789? Поскольку 123456789 при делении на 7 дает остаток 1, мы сразу же можем сказать: искомый остаток равен 1.

6. Из 126 различных комбинаций из 4 цифр делящееся на 7 число нельзя составить лишь из трех: 1238, 1389 и 2469.

ГЛАВА 20

ЕЩЕ ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

1. Семь карточек. Лист бумаги размером 25×17 см имеет площадь 425 см². Семь карточек меньшего формата размером 6×10 см имеют общую площадь 420 см². Ясно, что полностью закрыть ими весь большой лист невозможно. Возникает вопрос: чему равна максимальная площадь той части большого листа, которую можно закрыть семью карточками? Карточки должны лежать плашмя, их нельзя складывать или разрезать. Зато их

можно располагать так, что они будут выходить за края большого листа, и на большом листе они могут лежать не только прямо, но и косо: не обязательно их края должны быть параллельными краям большого листа. На рис. 105 показано, как расположить семь карточек, чтобы они закрывали часть листа площадью 395 см², но это еще не максимум.

Эту головоломку удобнее решать, если предварительно вырезать из картона прямоугольник размером 25×17 см и 7 карточек размером 6×10 см. Вычисление незакрытой площади облегчится, если вы расчертите большой прямоугольник на квадраты со стороной 1 см.

2. Задача из теории хроматических графов. Шесть голливудских кинозвезд образуют весьма своеобразную группу. В ней любые две звезды либо относятся друг к другу с симпатией, либо ненавидят друг друга. Никакие три кинозвезды не испытывают взаимной симпатии. Докажите, что по крайней мере три кинозвезды питают друг к другу ненависть. Задача тесно связана с увлекательной новой областью теории графов — так называемыми «пусто-синими» хроматическими графами, природу которых мы поясним в ответе.

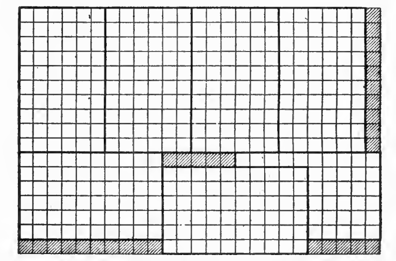


Рис. 105. Какую часть листа можно покрыть семью карточками?

3. Два выигрыша подряд. Некий математик, его жена и сын-подросток увлекаются шахматами. Однажды сын решил провести субботний вечер в компании приятелей и попросил у отца 10 долларов. Отец на секунду задумался и, выпустив из своей трубки клуб дыма, ответил:

— Давай сделаем так. Сегодня у нас среда. Ты сыграешь одну партию в шахматы сегодня вечером, вторую завтра и третью в пятницу. Твоими партнерами будем по очереди мама и я. Если ты выиграешь две игры подряд, я дам тебе денег.

— А кто будет играть со мной первую партию: ты или мама?

— Выбирай сам, — ответил математик, хитро усмехнувшись.

Сын знал, что отец играет лучше матери. В какой последовательности ему следовало играть три партии (с отцом — матерью — с отцом или же с матерью — с отцом — с матерью), чтобы максимизировать свои шансы на выигрыш в двух партиях?

Эта занимательная задача из элементарной теории вероятностей; разумеется, ответ нужно не угадать, а доказать.

4. Два «криптарифма». Криптарифм — это задача, в которой требуется расшифровать какие-то арифметические действия. В большинстве криптарифмов каждая цифра в какой-нибудь простенькой арифметической задаче зашифрована своей буквой. Два замечательных криптарифма на рис. 106 вносят приятное разнообразие в установившиеся каноны, но легко решаются с помощью логических рассуждений и допускают (каждый) лишь один-единственный ответ.

В обеих задачах умножаются какие-то два числа. В левой задаче каждая буква *E* означает четную цифру, буква *O* — нечетную. Разумеется, из того, что все четные цифры обозначены одной и той же буквой *E*, еще не следует, что все четные цифры одинаковы. Одна буква *E* может означать цифру 2, другая — 4 и т. д. Нуль считается четной цифрой. Требуется расшифровать весь пример.

В правой задаче каждая буква *P* означает какое-нибудь простое однозначное число (2, 3, 5 или 7).

Эта задача стала в своем роде классической.

```
    E E O            P P P
      O O              P P
  -------          -------
  E O E O          P P P P
  E O O          P P P P
  ---------      ---------
O O O O O        P P P P P
```

Рис. 106. Два необычных криптарифма.

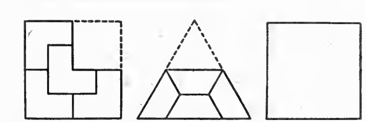


Рис. 107. Три задачи на разрезание.

5. Задача на разрезание. Если квадрат разделить на четыре одинаковых квадрата и одну четвертушку отрезать, то можно ли разбить оставшуюся часть на четыре конгруэнтных (то есть одинаковых по величине и форме) фигуры? Оказывается, можно. Как это делается, показано на рис. 107 слева. Аналогично если равносторонний треугольник разделить на 4 одинаковых равносторонних треугольника прямыми, параллельными его сторонам, и отрезать один из маленьких треугольников, имеющих общую вершину с большим, то оставшуюся часть треугольника также можно разбить на четыре конгруэнтные фигуры (на рис. 107 в центре). Обе приведенные нами задачи типичны для широкого класса задач на разрезание, условие которых формулируется так: «Дана какая-то геометрическая фигура. Требуется разрезать ее на заданное число одинаковых фигур меньших размеров, образующих в совокупности исходную фигуру».

Можно ли разрезать квадрат (на рис. 107 справа) на пять конгруэнтных частей? Оказывается, можно, причем решение единственно. Части могут быть любой, сколь угодно сложной и причудливой формы, но непременно одинаковой и по величине, и по форме. Асимметричные части разрешается «переворачивать», то есть каждую ассимметричную часть мы не отличаем от ее

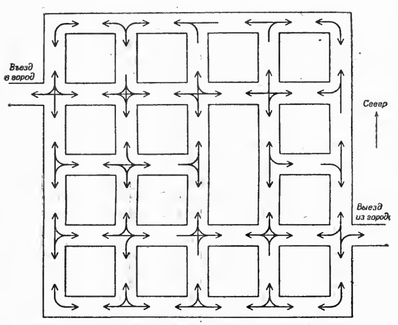


Рис. 108. Схема движения транспорта в городке Флойдз-Ноб.

зеркального отражения. На первый взгляд задача кажется необычайно трудной, но затем наступает «прозрение» и обнаруживается удивительно простое решение.

6. Проблемы уличного движения в городке Флойдз-Ноб. Роберт Эбботт, автор книги «Новые карточные игры» *, предложил вниманию читателей лабиринт, изображенный на рис. 108, сопроводив его следующим пояснением.

> «В городке Флойдз-Ноб, штат Индиана, имеется лишь 37 зарегистрированных автомашин, и мэр городка решил назначить своего двоюродного брата Генри Стейблза, большого шутника, известного своей любовью к эксцентрическим поступкам, начальником отдела регулирования уличного движения, решив, что тот без труда справится

* R. Abbott, Abbott's New Card Games, N. Y., 1963.

с возложенными на него обязанностями. Вскоре мэр пожалел о принятом решении. Проснувшись однажды утром, жители городка увидели множество новых дорожных знаков. Знаки эти были развешаны так, что движение на некоторых улицах стало односторонним, а повороты на перекрестках — делом весьма сложным и запутанным.

Жители городка были за то, чтобы сорвать все дорожные знаки. Однако начальник полиции — второй двоюродный брат мэра — обнаружил, что водители настолько выходят из себя от такого обилия знаков, что рано или поздно совершают запрещенный поворот, и городская казна получает от штрафов за эти нарушения больше, чем от штрафов за превышение скорости на пригородном шоссе.

Кроме того, жители городка не без злорадства ожидали, как на следующий день, в субботу, через город проследует Мозес Мак-Адам, самый богатый фермер в округе, имевший обыкновение проводить конец недели у себя в загородном доме. Все надеялись позабавиться над Мозесом, полагая, что проехать через город без единого нарушения невозможно. Но Мозес тайком раздобыл план города со всеми дорожными знаками и хорошенько изучил его. Когда настала суббота, он, к удивлению жителей, проехал через весь город без единого нарушения!»

Можете ли вы восстановить маршрут, по которому Мозес следовал через город? Очутившись на любом перекрестке, вы имеете право двигаться лишь в направлении одной из стрелок, то есть поворачивать в нужную сторону разрешается лишь при условии, если имеется закругление, по которому можно свернуть, а следовательно, прямо — лишь при условии, если в нужную сторону идет прямая линия. Поворачивать, двигаясь задним ходом, запрещается. Нельзя разворачиваться и на 180°. Покидать перекресток разрешается только в направлении какой-нибудь из стрелок. Например, достигнув первого после въезда в город перекрестка, вы должны будете выбрать одну из двух возможностей: поехать на север или прямо (то есть на восток). Если вы поеде-

те прямо, то на следующем перекрестке сможете либо свернуть на юг, либо продолжить свой путь на восток. Хотя на втором перекрестке имеется закругление к северу, но стрелки, выходящей из него на север, нет, поэтому покидать второй перекресток, держа курс на север, воспрещается.

7. Примечания Литлвуда. Время от времени на обложке какого-нибудь журнала появляется изображение того же самого журнала, на котором отчетливо видно еще меньшее изображение этого журнала и т. д., по-видимому до бесконечности. Эта разновидность бесконечно убывающих последовательностей нередко служит источником различного рода недоразумений в логике и семантике. Иногда бесконечно убывающую последовательность удается прервать, иногда сделать это оказывается невозможным. Английский математик Дж. Литлвуд в своей книге «Математическая смесь» * приводит в качестве примера подобной ситуации три примечания, сделанные в конце одной из его статей. Статья была опубликована во французском журнале и примечания (на французском языке) гласили:

> «1. Я весьма признателен проф. Риссу за перевод настоящей статьи.
> 2. Я признателен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания.
> 3. Я признателен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания».

Предположим, что Литлвуд совершенно не знает французского языка. С помощью какого рассуждения он может избежать бесконечного повторения одинаковых примечаний и остановиться на третьем примечании?

8. Как получить число 100 из цифр от 1 до 9. В сборниках занимательных задач часто встречается одна старая головоломка, хотя решение ее давно известно. Состоит она в следующем.

Требуется так расставить знаки арифметических действий между цифрами от 1 до 9, чтобы в результате получилось выражение, дающее число 100. Цифры должны

* Дж. Литлвуд, Математическая смесь, М., Физматгиз, 1962.

располагаться по порядку, переставлять их не разрешается. Задача имеет сотни решений, простейшее из них выглядит так:

$$1+2+3+4+5+6+7+(8\times 9)=100$$

Задача становится намного труднее и интереснее, если знаки арифметических действий ограничены плюсом и минусом. Решений в этом случае также много, например:

$$1+2+34-5+67-8+9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$123-45-67+89=100$$

«Последнее решение особенно просто, — писал Генри Э. Дьюдени, — и я не думаю, что его когда-нибудь удастся улучшить» *.

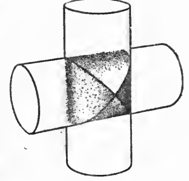
Если учесть популярность задачи, то нельзя не удивляться тому, что «обратная» ей головоломка привлекает столь мало внимания. Под «обратной» я понимаю следующую задачу. Цифры расставлены в порядке убывания от 9 до 1. Требуется расставить наиболее экономным способом знаки плюс и минус так, чтобы получилось выражение, равное 100.

9. Пересекающиеся цилиндры. Одним из величайших достижений Архимеда следует считать использование (хотя и в нестрогой форме) некоторых идей, сыгравших впоследствии важную роль в обосновании математического анализа.

На рис. 109 изображен классический пример задачи, для решения которой, по мнению большинства современных математиков, непременно нужно знать методы математического анализа (эта задача иногда даже приводится в учебниках). Остроумные методы Архимеда позволяют легко решить задачу. Точная формулировка ее такова: «Два прямых круговых цилиндра пересекаются под прямым углом. Радиусы обоих цилиндров равны единице. Чему равен объем пространственной фигуры, образованной пересечением цилиндров?»

* H. E. Dudeney, Amusements in mathematics, N. Y., Dover Publications, 1958, Problem 94.

Рис. 109. Задача Архимеда о пересекающихся цилиндрах.



До нас не дошли записи, из которых бы было видно, как решал эту задачу сам Архимед, но получить ответ удивительно просто. Знать требуется лишь немногим больше формулы площади круга (πR^2, где R — радиус круга) и формулы объема шара ($^4/_3\pi R^3$, где R — радиус шара). Вполне возможно, что и Архимед решал эту задачу именно таким же способом. В наши дни задача о пересечении цилиндров стала знаменитым примером того, как с помощью остроумных, но простых соображений можно решить задачу, которая считалась доступной лишь методам так называемой высшей математики.

ОТВЕТЫ

1. Если края карточек должны быть параллельны краям большого листа, то закрыть ими можно самое большее 400 см². Одно из многочисленных оптимальных расположений карточек показано на рис. 110.

Стифен Барр был первым, кто заметил, что, повернув центральную карточку (рис. 111), можно чуть увеличить площадь закрытой части листа (до 400, 286... *см*²). Чуть большее увеличение угла позволяет закрыть еще бо́льшую часть листа. Вычислить угол, при котором достигается максимум, то есть будет закрыта максимально возможная часть листа, — задача не элементарная, для ее решения приходится прибегать к методам математического анализа. Выяснилось, что при изменении угла от 6° 12′ до 6° 13′ площадь закрытой части листа остается неизменной с точностью до пятого знака после запятой: 400,26332... см². При угле в 6° 12′ 37,8973″ площадь закрытой части листа составляет 400,263337992... см².

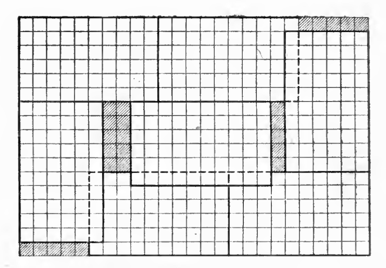


Рис. 110. Как семью карточками закрыть 400 см².

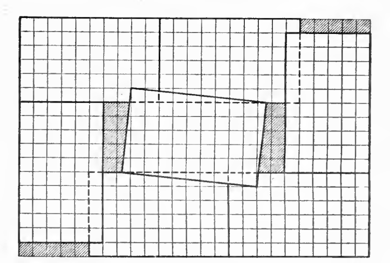
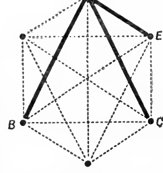


Рис. 111. При таком расположении карточки закрывают чуть больше 400 см².

Рис. 112. Граф, дающий решение задачи 2.



2. Задача легко решается графически. Пусть шесть точек озиачают шесть кинозвезд (рис. 112). Пуиктириая лииия, соедиияющая пару точек, означает либо взаимиую симпатию, либо взаимиую иеиависть. Пусть сииие лииии (в нашем случае они обозначеиы пуиктиром) соответствуют симпатии, а красиые (жириые лииии) — иеиависти.

Рассмотрим точку *A*. Из пяти лииий, исходящих из иее, по крайией мере три должиы быть одиого цвета. Поскольку рассуждеиия ие меияются иезависимо от того, какие три лииии мы выберем и какого оии цвета, будем считать, что мы выбрали три красиые лииии, выделеиные иа рис. 112. Если бы все стороиы треугольиика *BCE* были сииими, то это озиачало бы, что кииозвезды *B*, *C* и *E* отиосятся друг к другу с взаимиой симпатией. Поскольку это противоречит условиям задачи, по крайией мере одиа из сторои треугольиика *BCE* должиа быть красиого цвета. Независимо от того, какая имеиио из сторон треугольиика *BCE* окажется красиой, мы получаем одии треугольиик, у которого все стороиы красиого цвета (либо треугольиик *ABC*, либо *ABE*, либо *ACE*). Следовательио, всегда можио иайти трех киио-звезд, которые испытывают друг к другу ненависть. К аиалогичиому результату мы бы пришли, выбрав за исходные три синие лииии вместо трех красиых. В этом случае все стороиы треугольиика *BCE* должиы были бы быть красиого цвета, ибо в противиом случае мы бы получили сииий треугольиик, образоваииый двумя прямыми, исходящими из *A* к коицам сиией стороны треугольника *BCE*, и этой сиией стороиой. Таким образом, всегда иайдется по крайией мере один треугольиик, у которого все стороны будут либо сииими, либо красными. Поскольку треугольиики с тремя сииими сторонами запрещеиы условиями задачи, можно утверждать, что всегда

найдется по крайней мере один треугольник, у которого все стороны будут красными.

В действительности можно высказать даже более сильное утверждение. Если синие треугольники запрещены, то всегда найдется по крайней мере два треугольника, все три стороны которых будут красного цвета. В теории графов двуцветный граф такого типа, не содержащий синих треугольников, называется хроматическим «пусто-синим» графом. Если число вершин графа, как в нашей задаче, равно шести, то минимальное число красных треугольников равно двум.

Если число вершин «пусто-синего» графа меньше шести, то нетрудно построить примеры таких графов, не содержащих ни одного красного треугольника. При числе вершин, равном семи, красных треугольников не меньше четырех. При восьми вершинах минимальное число красных треугольников равно восьми, при девяти вершинах — тринадцати. Существует хорошо развитая теория «пусто-синих» графов.

3. Пусть A играет в шахматы сильнее, чем B. Если вы хотите выиграть две партии подряд, то как играть лучше: сначала партию с A, затем с B и снова с A или сначала с B, затем с A и снова с B?

Пусть P_1 — вероятность вашего выигрыша у A, а P_2 — вероятность вашего выигрыша у B. Вероятность невыигрыша (то есть проигрыша и ничьей) при игре против A равна $1 - P_1$, а при игре против B равна $1 - P_2$.

Если вы играете с противниками в порядке ABA, то выиграть две игры подряд можно тремя способами:

1. Если вы выиграете все три игры. Вероятность этого события равна $P_1P_2P_1 = P_1^2P_2$.

2. Если вы выиграете лишь первые две игры. Вероятность этого события равна $P_1P_2(1 - P_1) = P_1P_2 - P_1^2P_2$.

3. Если вы выиграете лишь две последние игры. Вероятность этого события равна $(1 - P_1)P_2P_1 = P_1P_2 - P_1^2P_2$.

Сложив все три вероятности, мы получим число $P_1P_2(2 - P_1)$. Оно и дает вероятность выиграть две игры подряд, если ваши партнеры чередуются в порядке ABA.

Если же они чередуются в порядке BAB, то аналогичные рассуждения показывают, что вероятность вы-

играть все три игры равна $P_1^2P_2$, вероятность выиграть первые две игры равна $P_1P_2 - P_1P_2^2$ и вероятность выиграть две последние игры — $P_1P_2 - P_1P_2^2$. Сумма всех трех вероятностей равна $P_1P_2(2 - P_2)$. Это и есть вероятность выиграть подряд две игры при чередовании ваших партнеров по схеме BAB.

Из условия задачи известно, что P_2 (вероятность вашего выигрыша у более слабого игрока B) больше P_1 (вероятности вашего выигрыша у более сильного игрока A). Следовательно, величина $P_1P_2(2 - P_1)$ должна быть больше величины $P_1P_2(2 - P_2)$. Иначе говоря, вы имеете больше шансов выиграть подряд две игры, если будете менять своих партнеров по схеме ABA, то есть сначала сыграете партию с более сильным игроком, затем — с более слабым и в заключение — снова с более сильным.

Некоторые читатели пришли к аналогичному выводу с помощью следующих нестрогих рассуждений. Чтобы выиграть две игры подряд, сын должен выиграть вторую игру. Следовательно, в его интересах играть вторую игру против более слабого игрока, то есть против матери. Кроме того, он должен выиграть по крайней мере одну игру у более сильного игрока. Поэтому его шансы на успех повысятся, если с более сильным игроком он встретится в двух играх. Следовательно, ему выгодно менять противников по схеме ABA. Один из читателей заметил, что, поскольку задачу можно решить, ничего не зная о вероятностях выигрыша против каждого из противников, для получения ответа достаточно рассмотреть какой-нибудь особенно простой частный случай. Пусть, например, сын заведомо побеждает мать. Тогда он сумеет выиграть две игры подряд, если хоть раз победит отца. Шансы на выигрыш у него будут выше, если он сыграет с отцом две партии.

4. Единственное решение левого криптарифма имеет вид

$$\begin{array}{r} 285 \\ \underline{39} \\ 2565 \\ \underline{855} \\ 11115 \end{array}$$

единственное решение правого —

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325\ \ \\ \hline 25575 \end{array}$$

Прежде чем приступать к решению второй, более трудной задачи, лучше всего постараться найти все трехзначные числа, записанные с помощью «простых» цифр (то есть цифр, выражающих простые однозначные числа), которые после умножения на простое однозначное число дают четырехзначное число, также записанное одними лишь «простыми» цифрами. Таких трехзначных чисел всего четыре:

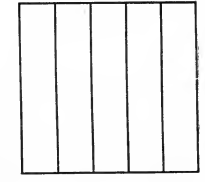
$$775 \times 3 = 2325$$
$$555 \times 5 = 2775$$
$$755 \times 5 = 3775$$
$$325 \times 7 = 2275$$

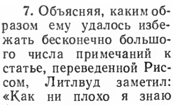
Поскольку нас интересуют трех- и четырехзначные числа, записанные лишь с помощью «простых» цифр, каждое из приведенных выше трехзначных чисел приводит к допустимому четырехзначному числу лишь при одном множителе (число 775 — при множителе 3, число 555 — при множителе 5 и т. д.). Следовательно, обе цифры двузначного множителя в нашей задаче должны быть одинаковыми. Перебрав четыре возможности, мы найдем ответ.

5. Квадрат можно разрезать на пять конгруэнтных частей лишь так, как показано на рис. 113. Панический ужас перед сложностью задачи, испытываемый теми, кто не может ее решить, может сравниться лишь с чувством неловкости, которое охватит их, когда они заглянут в ответ.

6. Чтобы проехать через Флойдз-Ноб, не нарушив правил уличного движения, необходимо совершать повороты на перекрестках в следующих направлениях (С означает север, Ю — юг, В — восток и З — запад; перекрестки — в том порядке, как они встречаются на пути): В-В-Ю-Ю-В-С-С-С-В-Ю-З-Ю-В-Ю-Ю-З-З-З-З-С-С-В-Ю-З-Ю-В-В-В-В-С-В.

Рис. 113. Решение задачи 5.





7. Объясняя, каким образом ему удалось избежать бесконечно большого числа примечаний к статье, переведенной Риссом, Литлвуд заметил: «Как ни плохо я знаю французский язык, все же я в состоянии *переписать* французскую фразу».

8. Чтобы получить выражение, равное 100, между цифрами, взятыми в обратном порядке, достаточно вставить четыре плюса и один минус:

$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

Других решений с четырьмя знаками не существует. Полный список всех решений для цифр, расположенных как в порядке возрастания, так и в порядке убывания, приведен в книге автора «Нумерология д-ра Матрикса» *.

9. Следующий изящный метод позволяет легко решить задачу с помощью одних лишь элементарных средств.

Представим себе, что в часть пространства, принадлежащую обоим цилиндрам одновременно, вписана сфера единичного радиуса с центром в точке пересечения осей цилиндров. Разрежем цилиндры и сферу пополам плоскостью, проходящей через оси цилиндров (на рис. 114 слева). Сечение общей части двух цилиндров будет иметь вид квадрата, сечение сферы — вид окружности, вписанной в этот квадрат.

Предположим теперь, что мы рассекли цилиндры и сферу плоскостью, параллельной первой, но не проходящей через оси цилиндров. От цилиндров и сферы такая плоскость отрежет не половину, а лишь небольшую

* M. Gardner, Numerology of Dr. Matrix, N. Y., 1967, pp. 64—65.

часть (на рис. 114 справа). Сечение общей части цилиндров с плоскостью будет по-прежнему иметь вид квадрата, а сечение сферы — вид вписанной в этот квадрат окружности. Нетрудно видеть, что, какую бы плоскость, параллельную осям цилиндров, мы ни провели, результат будет одним и тем же: квадрат с вписанной в него окружностью.

Представим себе, что мы сложили все эти продольные срезы, как страницы книги. Объем сферы будет, очевидно, равен «сумме» всех круговых сечений, а объем общей части цилиндров — «сумме» всех квадратов. Следовательно, отношение объема общей части цилиндров к вписанной в нее сфере равно отношению площади круга к площади описанного вокруг него квадрата. Несложные выкладки показывают, что последнее отношение равно $\pi/4$. Обозначив через x объем общей части цилиндров, получим уравнение

$$\frac{4\pi r^3/3}{x} = \frac{\pi}{4},$$

откуда $x = {}^{16}/_3\, r^3$. В нашем случае $r = 1$; следовательно, объем общей части двух цилиндров равен просто ${}^{16}/_3$. Как заметил Архимед, эта величина составляет ${}^{2}/_3$ объема куба, описанного вокруг сферы, то есть куба с ребром, равным диаметру каждого цилиндра.

В приведенном выше решении используется так называемый метод неделимых Бонавентуры Кавальери — итальянского математика, жившего в XVII веке. В своей

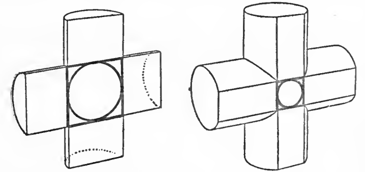


Рис. 114. Два сечения архимедовых цилиндров и вписанной в их пересечение сферы.

простейшей форме этот метод основан на утверждении, что объемы двух тел, имеющих одинаковую высоту и равные (по площади) поперечные сечения на любом уровне над основанием, равны. Чтобы доказать это утверждение, Кавальери пришлось выступить в роли предтечи интегрального исчисления: он рассматривал тела как составленные из слоев и переходил к пределу. Принцип Кавальери был известен еще Архимеду. В обнаруженной лишь в 1906 году его книге «О методе», в которой дается решение задачи об объеме общей части двух пересекающихся цилиндров, Архимед приписывает честь открытия этого принципа Демокриту, получившему с помощью этого принципа формулы для объема пирамиды и конуса.

Если бы речь шла об отыскании объёма общей части трех взаимно перпендикулярных цилиндров единичного радиуса, то ответ был бы $8(2-\sqrt{2})$.

ГЛАВА 21

ВОСЕМЬ ФЕРЗЕЙ И ДРУГИЕ ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Ни один геометрический узор не был так тщательно исследован любителями занимательной математики, как паркет, выложенный квадратными плитками. Я имею в виду не игры типа шашек, шахмат и го, в которых уменьшенный вариант такого паркета служит доской, а нескончаемую вереницу головоломок, основанных на метрических или топологических свойствах самого узора.

Вспомним одну из уже встречавшихся нам ранее и широко известных задач*. Можно ли 32 костями домино полностью закрыть все поля обычной шахматной

* См. задачу 3 из гл. 3 книги «Математические головоломки и развлечения».

доски размером 8×8 клеток, у которой выпилены два угловых поля, лежащие на противоположных концах диагонали? Поскольку 1 кость домино может закрыть 2 соседних поля — одно черное и одно белое, — 31 кость закроет 31 черное поле и 31 белое. Выпиленные квадраты лежат на концах диагонали и, следовательно, одного цвета, поэтому доска с выпиленными углами имеет 32 поля одного и 31 поле другого цвета. Такую доску, очевидно, нельзя покрыть костями домино. Доказательство «несуществования» решения этой задачи служит классическим примером того, как раскраска шахматной доски не только придает ей более изящный и привлекательный вид и не только позволяет легче проследить ходы в шахматной или шашечной партии, но и служит мощным средством анализа разнообразных задач, в которых так или иначе используется шахматная доска.

Представим себе, что мы выпиливаем теперь из шахматной доски два квадратика разных цветов (один черный и один белый), выбирая их в разных частях доски. Всегда ли можно закрыть оставшиеся 62 квадрата 31 костью домино? Оказывается, всегда. Существует ли простое доказательство этого утверждения? Разумеется, мы могли бы попросту перебрать все пары квадратов разного цвета, но такое решение было бы громоздким и неизящным. Изящное доказательство нашел математик Гомори. Проведем на шахматной доске сплошные линии — стенки — так, как показано на рис. 115. В лабиринте между стенками черные и белые клетки следуют друг за другом, чередуясь, как бусины двух цветов в ожерелье (заметим, что «нить», на которую «нанизаны» наши клетки, замкнута, то есть маршрут, по которому можно обойти весь лабиринт, представляет собой замкнутую кривую). Какие бы два квадрата разных цветов мы ни вырезали из доски, наше «ожерелье» из клеток разорвется: в одном месте, если вырезанные клетки лежат рядом друг с другом в проходе между стенками лабиринта, и в двух местах в противном случае. Каждый отрезок ожерелья будет состоять из четного числа клеток. Следовательно, его (а тем самым и всю доску) можно полностью покрыть костями домино.

Не менее интересна и другая задача. Предположим, что мы выпилили клетки из шахматной доски так, что на оставшуюся часть нельзя поместить ни одной кости

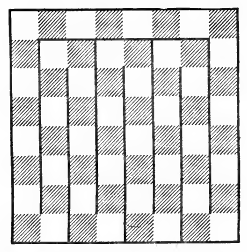


Рис. 115. Доказательство теоремы Гомори о домино и шахматной доске.

домино. Чему равно наименьшее число клеток, которые надо удалить, чтобы на оставшуюся часть доски нельзя было наложить ни одной кости домино (кость считается наложенной, если она накрывает две смежные по вертикали или горизонтали клетки доски)? Нетрудно видеть, что вырезать из доски нужно 32 клетки одного цвета. Задача значительно усложняется, если вместо домино взять одну из фигур полиомино* (напомним, что фигуры полиомино составлены из клеток шахматной доски, каждая из которых имеет по крайней мере одну общую сторону с какой-то другой клеткой). Эту разновидность задач недавно предложил изобретатель полиомино и автор первой книги об этой игре С. Голомб**. Ему же принадлежит решение для всех типов полиомино до двенадцати пентамино (фигур, состоящих из пяти клеток) включительно. Очень красивая задача возникает, если взять пентамино в форме греческого креста. Предположим, что обычная шахматная доска 8×8 сделана из бумаги. Если заштриховать 16 клеток так, как показано на рис. 116, то вырезать из оставшейся части доски

* См. главы 12 и 46 первой книги.
** S. Golomb, Polyominoes, N. Y., 1965.

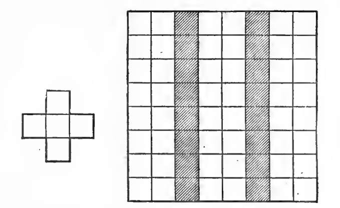


Рис. 116. Задача о пентамино в форме греческого креста.

пентамино в форме греческого креста, очевидно, невозможно. Однако число 16 не является минимальным. Спрашивается, при каком числе заштрихованных клеток этот минимум *достигается* (иначе говоря, требуется узнать, чему равно наименьшее число заштрихованных клеток, при котором из остальной части доски нельзя вырезать пентамино в форме греческого креста).

Не менее увлекательна (пока еще не решенная) другая задача на разрезание шахматной доски: в ней требуется определить, сколькими способами доску 8×8 можно разрезать на две половинки вдоль границ между клетками. Обе части, на которые разрезается доска, должны быть одинаковыми по размерам и форме и совпадать при наложении. Эту задачу впервые поставил Генри Э. Дьюдени. По его словам, эта задача напоминает ежа: с какой стороны к ней ни подступись, обязательно наткнешься на «колючку» — какую-нибудь трудность. Сам Дьюдени не сумел составить полный список решений. Доску 2×2, очевидно, можно разрезать на две одинаковые части лишь одним способом. Доску 3×3 вообще нельзя разрезать на две одинаковые части (поскольку она составлена из нечетного числа клеток), но если считать, что центральная клетка удалена, то доску 3×3 (с отверстием в центре) снова можно будет разрезать на две равные части лишь одним-единственным способом.

Обнаружить число решений для доски 4×4 не так просто, но после небольшого размышления становится ясно, что разрезать ее на две равные части можно всего лишь шестью способами (рис. 117). В каждом случае доску (и ее части) можно поворачивать и подвергать отражениям, но те варианты, которые при этом получатся, не считаются отличными от 6 уже найденных решений. Дьюдени сумел показать, что доска 5×5 (с отверстием на месте центральной клетки) допускает 15 различных способов разрезания на две равные части, а доска 6×6 — целых 225 способов! На этом он остановился. С помощью ЭВМ было бы нетрудно решить аналогичные задачи для досок 7×7 и 8×8, однако, насколько известно, этим еще никто не занимался.

Задачу, тесно связанную с предыдущей, предложил Г. Гроссман. Квадратную шахматную доску нужно разрезать на одинаковые по форме и величине четвертушки. Доску 2×2, так же как и доску 3×3 с отверстием вместо центральной клетки, можно «четвертовать» лишь одним способом. Что можно сказать о доске 4×4? Сколькими принципиально различными (то есть не переходящими одно в другое при поворотах и отражении в зеркале) способами ее можно разрезать на четыре одинаковые по величине и форме части? Читатели без

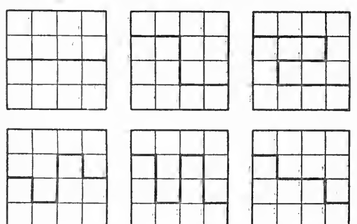


Рис. 117. Шесть решений задачи о разрезании доски 4×4 на две равные по величине и одинаковые по форме части.

труда построят все схемы разрезания. Более храбрые читатели могут попытать счастья в решении аналогичной задачи для доски 5×5 с отверстием в центре. Для их сведения сообщаем, что число решений в этом случае равно 7. (То обстоятельство, что любую квадратную доску четного порядка* и любую квадратную доску нечетного порядка с отверстием на месте центральной клетки всегда можно разделить на четыре одинаковые части, связано с простым теоретико-числовым фактом: квадрат любого четного числа делится на 4 без остатка, а квадрат любого нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1.) Задачу о «четвертовании» нетрудно проанализировать без помощи ЭВМ даже для доски 6×6, хотя число решений при этом возрастает до 37. Как и в задаче о делении доски на 2 равные части, решения задачи о четвертовании для досок 7×7 и 8×8 неизвестны, хотя не исключено, что кто-нибудь, улучив несколько минут «машинного досуга», уже нашел их.

Обе задачи — о делении квадратных шахматных досок на 2 и на 4 одинаковые части — имеют пространственные (трехмерные) аналоги. Анализ пространственных задач значительно сложнее. Трудности начинаются уже с куба $2 \times 2 \times 2$. Многие думают, будто такой куб можно разрезать на две половинки лишь одним способом (разрез нужно проводить только по плоскостям, отделяющим друг от друга кубические «клетки»), в действительности же куб $2 \times 2 \times 2$ можно разрезать на две половинки тремя способами. (Можете ли вы наглядно представить их?) На четыре одинаковые части куб $2 \times 2 \times 2$ можно разрезать двумя способами. Относительно куба $4 \times 4 \times 4$ никаких результатов не известно (ни для задачи о разрезании его на две равные части, ни для задачи о «четвертовании»).

Представим себе, что на нашей шахматной доске появились какие-то фигуры, и перед нами откроются новые безграничные возможности создания увлекательнейших головоломок. Возьмем, например, доску порядка n (напомним, что порядком доски мы называем число клеток, прилегающих к ее стороне). Чему равно максимальное число ферзей, которых можно расставить на

* Порядком квадратной шахматной доски автор называет число клеток, укладывающихся вдоль ее края. — *Прим. перев.*

доске так, чтобы они не атаковали друг друга? Поскольку ферзь может ходить на любое число клеток по горизонтали, вертикали и диагонали, задачу можно сформулировать иначе: чему равно максимальное число фигур, расставленных на шахматной доске так, что никакие две из них не стоят на одной вертикали, горизонтали или диагонали. Нетрудно видеть, что максимальное число фигур не может превышать порядок доски. Доказано, что на доске порядка n при $n > 3$ можно расставить n не атакующих друг друга ферзей.

Если не считать различными расстановки фигур, переходящие друг в друга при поворотах доски и отражениях в зеркале, то на доске 4×4 ферзей можно расставить одним способом, на доске 5×5 — двумя способами и на доске 6×6 — одним способом. (Читатель может попытаться найти эти решения собственными силами.) На доске 7×7 решений становится уже шесть, на доске 8×8 — двенадцать, на доске 9×9 — сорок шесть и на доске 10×10 — девяносто два. (Формула, позволяющая указывать число решений задачи о «сосуществовании» ферзей как функцию порядка доски n, не известна.) Если порядок доски n не делится на 2 или на 3, то n решений можно наложить друг на друга так, что ферзи заполнят все клетки доски. Например, на доске 5×5 можно разместить 25 ферзей (по 5 ферзей 5 различных цветов) так, что никакие ферзи одного цвета не будут атаковать друг друга.

Двенадцать основных (не переходящих друг в друга при поворотах и отражениях доски) схем размещения ферзей для стандартной шахматной доски 8×8 показаны на рис. 118. Задаче о восьми ферзях посвящена обширная литература. Впервые ее поставил в 1848 году Макс Беццель. Двенадцать основных решений опубликовал в 1850 году Франц На́ук. Доказать, что этими двенадцатью решениями исчерпываются все возможности, отнюдь не легко. Это сумел сделать (с помощью теории определителей) в 1874 году английский математик Дж. У. Л. Глэшер.

При поворотах и отражениях доски каждое из одиннадцати основных решений порождает семь других. Исключение составляет лишь десятое решение: вследствие своей симметрии оно порождает лишь три других решения. Таким образом, всего существует девяносто

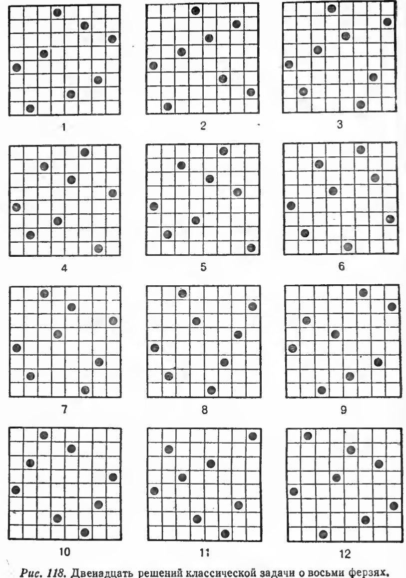


Рис. 118. Двенадцать решений классической задачи о восьми ферзях.

два решения задачи о восьми ферзях. Десятое, основное решение — единственное, у которого центральная часть доски (квадрат 4×4) свободна от ферзей. Десятое и первое решения имеют одно общее свойство: и у того, и у другого нет ферзей на главных диагоналях. Самым интересным из всех решений следует считать седьмое: у него никакие три ферзя (имеются в виду центры клеток, занимаемых ферзями) не лежат на одной прямой. Читатель может проверить это утверждение, проведя прямые, на которых стоят три или четыре ферзя, на схемах других решений. (Под прямыми мы понимаем здесь не только диагонали досок, но и прямые с другими углами наклона.) Время от времени какой-нибудь любитель головоломок объявляет о том, будто ему удалось найти еще одно решение задачи о восьми ферзях, в котором, так же как и в седьмом решении, никакие три ферзя не стоят на одной прямой. При более внимательном рассмотрении оказывается, что «новое» решение получается из решения 7 при соответствующем повороте и отражении доски. Кстати сказать, иногда приходится слышать утверждение, будто задача о восьми ферзях не имеет решения, у которого один ферзь стоял бы в углу доски. Как видно из рис. 118, на самом деле существуют два решения (5 и 11), у которых один из ферзей стоит на угловом поле. Оба решения обладают еще одним любопытным свойством: один из ферзей стоит на четвертом поле снизу у левого края доски.

Разумеется, вовсе не обязательно брать одни лишь ферзи. Очень интересные задачи возникают и для других фигур. Возьмем, например, ладьи. На доску порядка n, так же как и в случае ферзей, можно, очевидно, выставить самое большее n не атакующих ладей, иначе какие-то две ладьи оказались бы на одной вертикали или на одной горизонтали. Универсальный метод, позволяющий решать задачу о размещении не атакующих друг друга ладей для доски любого порядка, состоит в выстраивании ладей вдоль главной диагонали. Для доски порядка n существует $n!$ ($n!$ означает факториал, то есть $1 \times 2 \times \ldots \times n$) решений, однако исключить те из них, которые переходят друг в друга при поворотах и отражениях, настолько трудно, что число существенно различных решений неизвестно даже для стандартной доски 8×8.

Аналогичная задача о размещении не атакующих друг друга слонов на доске n-го порядка имеет $2n-2$ решений. Чтобы доказать это, заметим, что число диагоналей, идущих в одном направлении, равно $2n-1$, из них две диагонали содержат лишь по одной (угловой) клетке. Эти одноклеточные диагонали нельзя занимать слонами одновременно, ибо в противном случае слоны могли бы атаковать друг друга по главной диагонали, соединяющей занятые ими клетки. Следовательно, максимальное число слонов, которые могут разместиться на доске так, что они не будут атаковать друг друга, равно $2n-2$. Подставляя в эту формулу $n=8$, находим, что для стандартной доски 8×8 максимальное число слонов, из которых никакие два не атакуют друг друга, равно 14. Дьюдени показал, что разместить эти 14 слонов можно 36 существенно различными способами. Общее число решений задачи о слонах для доски порядка n равно 2^n, однако, так же как и для задачи о ладьях, трудно указать, какие решения существенно различны, а какие переходят друг в друга при поворотах и отражениях доски. Метод размещения максимального числа «невзаимодействующих» слонов на доске произвольного порядка n состоит в следующем: нужно расставить n слонов на клетки, прилегающие к одному краю доски, а остальные слоны (их $n-2$) расставить вдоль противоположного края, оставив угловые клетки пустыми.

Максимальное число королей, которые не будут атаковать друг друга, равно $n^2/4$ для досок четного порядка и $(n+1)^2/4$ для досок нечетного порядка. Одна из схем размещения королей состоит в том, что короли располагаются в узлах квадратной решетки, причем каждый из них отделен от соседа одной клеткой. Задача об определении числа различных способов размещения максимального числа не атакующих друг друга королей на доске $n \times n$ очень трудна. Ее лишь недавно решили К. Фабель и Х. Э. Кемп *. С учетом поворотов и отражений для доски 8×8 существует 281 571 решение.

Коня за его причудливые прыжки Дьюдени называл «презренным шутом шахматной доски». Задача о разме-

* E. Bonsdorf, K. Fabel, O. Riihimaa, Schach und Zahl, Düsseldorf, 1966.

щении не атакующих друг друга коней, по-видимому, легче поддается анализу, чем аналогичная задача для других шахматных фигур. Чему равно наибольшее число коней, которых можно разместить на стандартной шахматной доске 8×8 так, чтобы никакие два из них не атаковали друг друга? Сколькими существенно различными способами можно решить эту задачу?

ОТВЕТЫ

Задача о делении шахматных досок на две и четыре равные по величине и форме части захватила воображение многих читателей. Одни из них проверили правильность приведенного Дьюдени числа 255 существенно различных решений задачи о разбиении доски порядка 6 на две равные (не только по величине, но и по форме) части. Другие составили программы и с помощью вычислительных машин получили ответы для досок порядков 7 и 8. Число решений оказалось равным 1897 для досок порядка 7 и 92 263 для досок порядка 8. Позднее было найдено и число разбиений на две равные части для досок порядка 9. Оно оказалось равным 1 972 653. Для получения его быстродействующей ЭВМ пришлось работать в течение 22 минут.

Один из составителей программы сообщил автору в письме, что его программа была основана на следующем соображении: линия, делящая доску на две половины, должна проходить через центр доски, который разбивает ее на две равные части; обе половинки линии раздела должны располагаться симметрично относительно центра. «Действия машины, следующей нашей программе, чем-то напоминают действия мыши, пытающейся выбраться из лабиринта, — писал он. Начинает она всегда с центра доски. Каждый ход означает продвижение на одну единицу (сторону клетки), причем машина все время сворачивает вправо. Наткнувшись на уже пройденный участок пути, машина отступает на одну единицу назад, поворачивает на 90° влево и продолжает двигаться дальше. Достигнув края доски, она запоминает полученное решение, после чего отступает на одну единицу назад, поворачивает влево и т. д. Так она находит все возможные решения. Выдача результатов на

печать происходит, когда машина обнаруживает прямой путь от центра до края доски в направлении первого шага».

Программа такого типа применима только к доскам четного порядка. Составление программ для досок нечетного порядка с отверстием вместо центральной клетки более сложно.

Многих читателей интересует задача о восьми ферзях — ее история, обобщения, различные любопытные подробности. Среди посвященной ей обширной литературы наиболее полной следует считать работу Аренса *. В ней приведено число основных решений для досок всех порядков до 13. Общее число решений известно и для досок более высокого порядка, но если число основных решений для доски порядка 14 и было кем-то найдено, то автору оно пока не известно.

Один из читателей обратил мое внимание на изящное и простое доказательство того, что основные решения задачи о восьми ферзях для доски порядка 8 (из числа 12 решений, приведенных на рис. 118) нельзя наложить друг на друга так, чтобы они заполнили все 64 клетки. Автором этого решения (1914 г.) является Т. Госсетт. Нужно начертить доску 8×8, заштриховать по четыре клетки в середине рядов, примыкающих к краям доски, и четыре угловые клетки доски 6×6, расположенной в центре большой доски. Разместив на доске восемь ферзей по любой из 12 основных схем, мы обнаружим, что по крайней мере три ферзя находятся на заштрихованных клетках. Если бы можно было наложить друг на друга более шести решений задачи о восьми ферзях, то это означало бы, что на заштрихованных клетках (которых всего 20) оказался бы по крайней мере 21 ферзь, причем каждый из них стоял бы на своей клетке. Полученное противоречие доказывает, что наложить основные решения задачи о восьми ферзях так, чтобы при этом на доске не оказалось пустых клеток, нельзя.

Интересный вариант задачи о ферзях возникает в том случае, если каждый ферзь будет ходить не только как взятые вместе слон и ладья (традиционно), но и как

* A. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig, 1910, Bd. 1, Kap. 9.

Рис. 119. Решение задачи Голомба.

конь. Можно ли разместить n «сверхферзей» на доске $n \times n$ так, чтобы они не атаковали друг друга? Нетрудно показать, что эта задача не имеет решений, если порядок доски меньше или равен 9. Один из читателей рассмотрел 92 решения задачи о ферзях для доски порядка 10 и пришел к заключению, что лишь в одном случае все 10 ферзей можно считать «сверхферзями». Отыскание этого уникального случая мы предоставляем читателю.

Решения задачи о не атакующих друг друга ладьях были получены независимо двумя читателями. Не прибегая к ЭВМ, они нашли 5282 основных решения для доски порядка 7 и 46 066 — для доски порядка 8. Один из них сообщил, что для доски порядка 9 число решений равно 456 454, но этот результат пока еще не подтвердился. Число основных решений задачи о ладьях для досок порядка от 2 до 7 равно соответственно 2, 7, 23, 115, 694.

Чтобы из доски 8×8 нельзя было вырезать пентамино в форме греческого креста, из нее нужно вырезать самое малое десять клеток. Задача допускает много решений. Одно из них, принадлежащее В. Лионсу, показано на рис. 119.

Доску 4×4 можно разрезать на четыре одинаковые части лишь пятью способами. Все они показаны вверху на рис. 120. Половинку доски в центре верхнего ряда можно заменить ее зеркальным отражением, но тогда две четвертушки доски нельзя будет наложить на две другие, не перевернув их на другую сторону. Доску 5×5 (с отверстием в центре) можно разделить на четыре одинаковые части семью способами. Все они показаны на рис. 120 внизу.

На стандартную доску можно выставить самое большее 32 коня так, чтобы они не угрожали друг другу: по

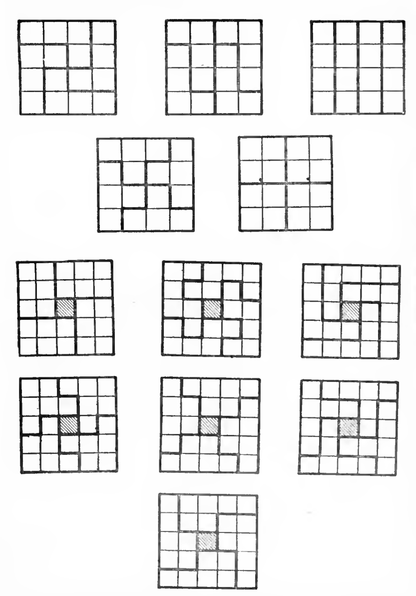


Рис. 120. Деление на четыре равные по величине и одинаковые по форме части («четвертование») доски 4×4 (вверху) и доски 5×5 (внизу).

одному коню на все клетки одного цвета. Любопытную подробность сообщил нам Дж. Томпсон. Несколько шахматистов, собравшихся в одном из нью-йоркских отелей, при обсуждении задачи о размещении коней пришли в такое возбуждение, что для усмирения страстей служащему отеля пришлось вызвать полицию.

ГЛАВА 22

ИГРА В ВЕРЕВОЧКУ

Подобно тому как прелесть оригами — старинного японского искусства складывания из бумаги — кроется в неисчерпаемом разнообразии фигурок, которые можно сложить из обыкновенного листа чистой бумаги, прелесть игры в веревочку, или, как ее называют в Англии и США, «кошачью колыбельку», заключается в неисчерпаемом разнообразии забавных и даже изящных узоров, которые можно сплести из простой веревочной петли*. Необходимый для игры инвентарь предельно прост: нужно взять шнурок длиной метра в полтора и связать его концы. Петлю можно рассматривать как модель простой замкнутой кривой. При всех манипуляциях с веревочкой лишь ее длина и топологические свойства остаются неизменными, поэтому игру с веревочкой можно считать топологической забавой в широком смысле.

Игры с веревочкой делятся на два основных типа: различные «освобождения» и «захваты» относятся к первому, веревочные узоры — ко второму. В играх первого типа вам кажется, будто веревочка обвязана вокруг какого-нибудь предмета или даже переплетена с ним, однако, потянув за ее кончик, вы с удивлением обнаруживаете, что она чудесным образом развязывается и

* Подробнее об этой игре вы сможете прочитать в статье «Веревочные узоры» в журнале «Наука и жизнь», № 7, 1966. — *Прим. перев.*

оказывается у вас в руках! В другом варианте игр того же типа веревочка непостижимым образом затягивается вокруг какого-нибудь предмета. Внешнее оформление этих забав бывает самым разнообразным: веревочку продевают в петлю пиджака и завязывают ее узлом, после чего она загадочным образом освобождается, стоит лишь потянуть ее за кончик; петли, наброшенные на шею, руку, ногу (и даже на нос), непонятно как распускаются и т. д. Иногда веревочку завязывают вокруг чьего-нибудь указательного пальца. После ряда забавных манипуляций пленник оказывается на свободе. В других фокусах-«освобождениях» веревочка невероятно сложным образом переплетается с пальцами левой руки, однако неожиданно легко освобождается, если ее потянуть за свободный конец, Существуют многочисленные варианты жульнического фокуса, который некогда показывали на ярмарках. Я имею в виду так называемый «фокус с подвязкой» (в те далекие дни, когда мужчины носили шелковые чулки, его нередко показывали с помощью подвязки): веревочку раскладывают на столе в виде довольно замысловатой кривой с самопересечениями, желающему предлагают поспорить (на деньги, разумеется), сумеет ли он поставить палец в такую из петель, которая затянется или, наоборот, не затянется, если потянуть за конец веревочки. Конечно, зритель всегда оставался в проигрыше, поскольку у жулика, заключавшего пари, имелись довольно тонкие способы предрешить исход в свою пользу.

Неизменным успехом пользуется следующий фокус. Возьмите веревочную петлю и сложите ее вдвое три раза подряд. У вас получится небольшая петля из восьми рядов веревочки. Проденьте в нее указательные пальцы обеих рук и начните ее вращать, обводя пальцы так, как показано на рис. 121,*а*. Остановитесь в положении, указанном на рис. 121,*б*, и сомкните концы большого и указательного пальцев каждой руки (рис. 121,*в*). Слегка опустите правую руку и сведите вместе концы больших и указательных пальцев, как показано на рис. 121,*г*. Обратите внимание, что большой палец правой руки касается указательного пальца левой руки, а большой палец левой руки касается указательного пальца правой руки. (Старайтесь не привлекать к этому

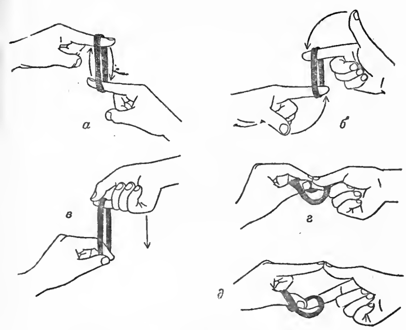


Рис. 121. Фокус с освобождением веревочной петли.

внимание зрителей: в этом весь секрет фокуса!) Держа большие пальцы прижатыми к указательным, поднимите большой палец правой руки и указательный палец левой так, как показано на рис. 121,*д*. Петля останется свободно лежать на большом пальце левой руки и указательном пальце правой. Легким толчком (не расцепляя сведенных вместе пальцев, образующих кольцо) сбросьте петлю.

Попросите любого желающего повторить ваши действия, и он убедится, что это чрезвычайно трудно. Большинство людей думают, что большой палец касается большого, а указательный — указательного. При таком соединении пальцев петлю действительно невозможно освободить, не разорвав при этом кольца, образуемого указательными и большими пальцами, а такой разрыв, естественно, недопустим. Потренируйтесь до тех пор, пока не научитесь показывать фокус гладко и в быстром темпе, тогда никто из зрителей не сможет повторить

ваши манипуляции, сколько бы вы ни демонстрировали фокус.

Совершенно иным типом фокуса является снятие колечка с пропущенной сквозь него веревочки, завязанной в петлю. Наденьте веревочную петлю, пропущенную сквозь колечко, на большие пальцы обеих рук зрителя (рис. 122). Снять колечко проще всего так. Положите вытянутый палец левой руки поверх обеих веревочек в точке A. Правой рукой возьмите ближайшую к вам веревочку в точке B и, приподняв ее вверх, накиньте на большой палец правой руки зрителя (слева от вас) круговым движением (сначала на себя, потом от себя). Согните слегка указательный палец левой руки, чтобы обе ветви петли натянулись. Сдвиньте кольцо до отказа влево. Возьмите правой рукой за верхнюю веревочку справа от кольца и, приподняв, накиньте ее на большой палец правой руки зрителя (на этот раз круговое движение должно быть обратным первому: сначала от себя, потом на себя).

Остановитесь и попросите зрителя плотно сжать кончики большого и указательного пальцев каждой руки, «чтобы петля не могла соскочить». Возьмите кольцо правой рукой и попросите зрителя при счете «три» развести руки. Скомандовав: «Три!», — выдерните указательный палец левой руки из петли. Кольцо останется у вас в правой руке, а веревочная петля — на пальцах зрителя. (Чтобы усилить впечатление, сдвиньте кольцо вправо. Тогда зрителю будет казаться, что оно сходит с веревочки у большого пальца его левой руки, где, как он твердо знает, петля никак соскочить не может.) Этот фокус особенно нравится детям, потому что он очень прост и они могут без труда показывать его товарищам.

Овладев этим фокусом, испробуйте свои силы на более хитрой его разновидности, когда на веревочку на-

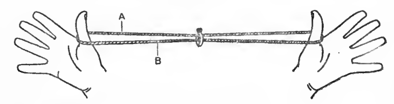


Рис. 122. Фокус с колечком.

Рис. 123. Как освободить ножницы, не перерезая веревки?

деты три кольца, а снимается лишь одно среднее. Начало фокуса проводится так же, как и в предыдущем случае: на большой палец правой руки зрителя накидывается петля. Затем нужно сдвинуть два кольца влево, а одно кольцо — вправо, к большому пальцу левой руки зрителя. Взяв верхнюю веревочку справа от двух колец, проденьте ее, прежде чем накидывать на большой палец правой руки зрителя, сквозь первое кольцо. После этого возьмитесь за среднее кольцо правой рукой и завершите фокус, как прежде. Среднее кольцо останется у вас в руках. Можете ли вы самостоятельно придумать последовательность операций, в результате которых кольцо снова окажется нанизанным на веревочку между двумя уже висящими на ней кольцами?

На рис. 123 фокус с освобождением предмета изображен в виде головоломки. Привяжите ножницы к одному концу веревочки так, как показано на этом рисунке, а другой конец веревочки привяжите к спинке стула. Требуется освободить ножницы, не разрезая веревки и не отвязывая ее от спинки стула. Эта головоломка слишком проста, чтобы стоило приводить ее ответ, хотя многим читателям она покажется трудной.

Имея веревочную петлю и монетку, можно играть в следующую игру, также основанную на «захватах» и «освобождениях» (читатель вряд ли знаком с этой игрой, поскольку я лишь недавно ее придумал). Монета плашмя кладется на стол. Играющий берет петлю за узел и держит ее над столом так, чтобы она, свисая, касалась монеты, а затем отпускает узел. Веревочка падает, образуя хаотическое нагромождение петель. Играющий намечает любую точку на монете и, взяв в руки карандаш, продевает его между витками

веревочки до тех пор, пока острие не упрется в выбранную точку. Держа в одной руке карандаш (острие которого плотно прижато к монете), другой рукой играющий тянет веревочку за узелок в сторону. С весьма высокой вероятностью веревочка окажется зацепленной за острие карандаша. Если веревочка делает один виток вокруг карандаша, то играющий получает 1 очко. За каждый дополнительный виток он получает еще по одному очку (например, если веревочка охватывает карандаш тремя витками, играющий получает 3 очка). Если веревочка оказывается незацепленной за карандаш, со счета играющего сбрасывается пять очков. Играть можно по очереди. Выигрывает тот, кто первым наберет 30 очков.

Ко второму, не менее многочисленному типу игр с веревочкой относятся различные узоры и фигуры, которые можно сплести из веревочной петли, надетой на обе руки. Искусство составления веревочных узоров играет важную роль на раннем этапе развития многих цивилизаций. На протяжении неисчислимых поколений веревочные узоры были одним из главных развлечений эскимосов (правда, веревочку им заменяли либо сухожилия северного оленя, либо ремень, вырезанный из шкуры морского котика). Весьма развито искусство составления веревочных узоров у индейцев Северной Америки и аборигенов Австралии, туземцев Новой Зеландии, Каролинских, Гавайских и Маршалловых островов, Филиппин, Новой Гвинеи и островов Торресова пролива. За многие столетия искусство плетения веревочных узоров достигло у этих народов (в особенности у эскимосов) такого совершенства, что могло бы с успехом соперничать с искусством складывания фигурок из бумаги, распространенным в странах Востока и в Испании. Были придуманы тысячи узоров, некоторые из них оказались настолько сложными (о них мы можем судить по зарисовкам, сделанным первыми исследователями-антропологами), что до сих пор не удалось установить последовательность операций, позволяющих получить их «на пальцах». Мастера из первобытных племен плели свои узоры с необычайной быстротой, используя, как правило, лишь пальцы рук (хотя иногда в дело шли зубы и пальцы ног). При этом нередко демонстрация сопровождалась пением какой-нибудь песни или рассказом занимательной истории.

Большинство веревочиых узоров получилн иазваиия по сходству с теми предметами, которые оии иапоминиают. Многие нз этнх «реалистнческнх» фигур оказываются действующими: между ладонями обеих рук внезапно пробегает зигзаг молинн, медленно заходнт солнце, мальчнк карабкается иа дерево, открывается и закрывается рот, вступают в борьбу двое охотннков за черепами, пускается вскачь лошадь, нзвнвается змея, неведомо кем пущенное копье летает вперед и назад, медленно ползет по ветке гусенница, нсчезает муха при попытке поймать ее двумя рукамн и т. д. Даже статичные картннкн нз веревочки нередко бывают отмечеиы глубокнм реалнзмом. Например, в картине, нзображающей бабочку, одна нз веревочек закручнвается спнралью, образуя ее хоботок.

Традицнонная «кошачья колыбелька» — еднпственная игра с веревочной петлей, шнроко распространенная средн детей Англни н США, — относится к ннтересной разновндностн игр с веревочкой, требующих иепременного участня двух нгроков. Веревочка поочередио переходнт с рук одиого из них иа руки другого, и при каждом переходе возникает иовый узор. В годы второй мировой войны солдатам армнн США, находнвшнмся иа островах Тнхого океаиа, рекомеидовалось нметь в кармаие веревочную петлю, чтобы при виде подозрительного туземца начинать игру в «кошачью колыбельку». Составители ниструкцнн утверждали, что туземцы, ие устояв перед соблазиом, также будут вступать в нгру.

Лнтература о веревочных узорах почти столь же обшнрна, как и литература по орнгами. Первые упоминиання об этой игре встречаются у авторов прошлого и позапрошлого века. Капнтан Унльям Блай в отчете о плавании «Баунти» (1787—1790) сообщает, что вндел, как в эту игру играли туземцы с острова Тантн. Чарлз Лэмб вспомннает, что нграл в «кошачью колыбельку» в школе. В 1879 году английский аитрополог Эдвард Б. Тэйлор обратнл внимаиие на то, что фнгуры из веревочкн служат важным показателем культурного развитня племенн нли народа, а в 1888 году аитрополог Фраиц Боус опублнковал подробное опнсаине различиых способов построення веревочиых фнгур. У. Риверс и Альфред Ч. Эддои в 1902 году разработали номенклатуру

и способ описания приемов, используемых при составлении веревочных фигур. С тех пор игре в веревочку было посвящено много статей в специальных антропологических журналах и даже монографий. Было время (десятые годы нашего века), когда, встретив человека с веревочной петлей в кармане, можно было с уверенностью сказать, что перед вами скорее всего антрополог. К сожалению, выяснилось, что игра в веревочку имеет меньшее значение для антропологии, чем предполагалось вначале. Сегодня человек с веревочной петлей в кармане скорее всего окажется не антропологом, а фокусником.

Большинство книг о веревочных узорах давно не переиздавалось, но в 1962 году вышло вторым изданием (первое издание увидело свет еще в 1906 году) самое подробное из когда-либо существовавших руководств на эту тему — книга Каролины Фернесс Джейн *. Это большое по объему и богато иллюстрированное издание содержит подробные указания о том, как построить более сотни различных веревочных узоров, и может служить превосходным руководством для всех, кто захочет ознакомиться с новым для себя видом искусства. Достойно сожаления, что искусство составления веревочных узоров не получило широкого распространения; особенно полезным оно могло бы оказаться в руках учителей начальных классов, медицинских сестер, ухаживающих за больными, вынужденными в течение длительного времени находиться в постели, и психиатров, рекомендующих ручной труд в качестве терапии.

Чтобы удовлетворить аппетиты читателей, я объясню, как сделать один из простейших и наиболее известных ромбических узоров. Миссис Джейн называет его «ромбы осэджей», потому что этот узор ей впервые показал индеец из племени осэджей, однако в США его чаще называют «лестницей Якова». Читатель должен взять полтора метра мягкого шнура, связать его концы и «показать, на что он способен». Немного попрактиковавшись, вы сможете строить «лестницу Якова» менее чем за 10 секунд.

* C. F. Jayne, String Figures and How to Make Them, Dover Publications, 1962.

Исходное положение — такое же, как и в большинстве веревочных узоров: петля надета на большие пальцы и мизинцы обеих рук (рис. 124,*а*). Указательным пальцем правой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем левой руки и, не спуская шнура с пальца, отведите правую руку вправо. Указательным пальцем левой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем правой руки (указательный палец левой руки должен при этом пройти между участками шнура, наброшенного на указательный палец правой руки) и отведите левую руку влево. У вас получится фигура, показанная на рис. 124,*б*. Освободив большие пальцы обеих рук и натянув шнур, вы получите фигуру, показанную на рис. 124,*в*. Поверните руки ладонями от себя, чтобы вам легче было поддеть кончиками больших пальцев самый дальний от вас участок шнура в точках, обозначенных на рис. 124,*в* буквами *А*. Поддев, разверните руки в прежнее положение. При этом участок, который был самым дальним от вас, пройдет под всеми остальным участками шнура и станет самым ближним (рис. 124,г). Согните большие пальцы над ближайшими к ним участками шнура и подденьте ими следующий участок в точках, обозначенных буквами *А* на рис. 124,*г*. Сбросьте петли с мизинцев. У вас получится веревочная фигура, изображенная на рис. 124,*д*.

Согните теперь мизинцы над ближайшими к ним участками шнура и тыльной стороной мизинцев, подденьте шнур в точках, обозначенных буквами *А* на рис. 124,*д*. Освободив большие пальцы, вы получите фигуру, изображенную на рис. 124, *е*. Согните большие пальцы над двумя ближайшими к ним участками шнура и подденьте их тыльной стороной следующие (третьи от них) участки шнура в точках, обозначённых буквами *А* на рис. 124,*е*. Верните большие пальцы в исходное положение. У вас получится фигура, изображенная на рис. 124,*ж*.

Большим и указательным пальцами правой руки возьмите шнур в точке *А* (рис. 124,*ж*), потяните на себя и наденьте петлю на большой палец левой руки. Затем возьмите петлю, которая уже была надета на большой палец левой руки, в точке *В* (рис. 124,*ж*) и поднимите ее, тем самым вы спустите эту петлю с большого пальца.

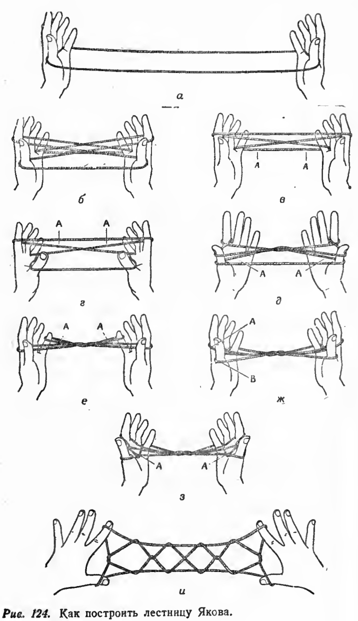


Рис. 124. Как построить лестницу Якова.

Этот обмен петель часто встречается в веревочных узорах. Левой рукой произведите аналогичный обмен петель на большом пальце правой руки. (Мастера веревочных узоров могут обменивать петли на обоих пальцах одновременно без помощи другой руки, но начинающему лучше придерживаться описанной выше последовательности.) После всех операций у вас должна получиться фигура, показанная на рис. 124, *з*.

Теперь все готово для последнего движения. Согнув указательные пальцы, введите их кончики в маленькие треугольники, помеченные буквами *А* на рис. 124, *з*. Высвободите мизинцы из петель и одновременно поверните обе руки ладонями от себя, как можно сильнее растопырив большие и указательные пальцы. (Выполняя заключительную операцию, следите за тем, чтобы шнур имел достаточно большую «слабину», иначе узор не раскроется полностью.) Туго натяните шнур. Если все было сделано правильно, вы увидите дорожку из ромбов, изображенную на рис. 124, *и*. Внезапное появление красивых узоров из хаоса веревочных переплетений принадлежит к числу наиболее приятных особенностей большинства манипуляций с веревочкой.

Тем, кто в совершенстве овладел искусством составления веревочных узоров, может доставить удовольствие выступление в «парном разряде», когда одну и ту же петлю удерживают двое играющих: один — правой, другой — левой рукой. Играя вдвоем, нетрудно одновременно сплести два одинаковых узора на двух петлях (первая петля накинута на правую руку первого игрока и на левую руку второго, вторая петля — на левую руку первого игрока и на правую руку второго). Гораздо труднее одновременно сплести два различных узора. Такой трюк требует огромного мастерства и точной координации движений.

В свое время в США получил известную популярность детективный роман Джерома Барри «Кошачья колыбелька» («Leopard Cat's Cradle»), в котором не последнюю роль играли веревочные фигуры. На пальцах очередной жертвы или на кусочках картона рядом с трупом убийца неизменно оставлял веревочный узор, символически отражавший ту или иную черту характера жертвы. Я познакомился с Джеромом Барри в 1962 году, когда тот работал в рекламном агентстве,

и узнал историю создания романа. Увидев впервые веревочные узоры, Барри, по его словам, был настолько потрясен, что стал повсюду носить с собой веревочную петлю, используя для упражнений любую свободную минуту. Чтобы как-то оправдать свое занятие, он отвечал на многочисленные вопросы окружающих, что веревочные узоры нужны ему для детективного романа, над которым он работает. Спрашивающих оказалось так много, что в конце концов Барри на самом деле пришлось сесть за детективный роман, в котором завязка была построена на веревочных узорах. В 50-е годы он вторично использовал веревочные узоры уже для создания телевизионного детективного фильма. Актер, исполнявший главную роль, никак не мог научиться хитрому искусству составления веревочных узоров, поэтому их приходилось сплетать заранее и покрывать клеем, чтобы шнурок стал твердым. Телекамера показывала актера, делающего первое движение, затем крупным планом — руки Барри, сплетающего всю фигуру до конца, и снова актера с готовым жестким каркасом на пальцах.

А вот какое письмо прислал мне А. Ричард Кинг, учитель начальной школы из Канады.

„Уважаемый мистер Гарднер!

«Лестница Якова», слово «доверие» и чувство собственной неполноценности стали для меня почти синонимами. Все началось с вашей статьи о веревочных узорах...

Я работаю учителем в четвертом классе школы для индейцев. Игра в веревочку, о которой говорилось в вашей статье, показалась мне весьма подходящим способом привлечения внимания детей. Никогда до этого я не замечал, чтобы кто-нибудь из них играл в эту игру. Однажды я показал малышам несколько простых фигур «кошачьей колыбельки», они с удовольствием взирали на все мои манипуляции, но никаких самостоятельных действий с их стороны не последовало. (Дети, о которых я говорю, собрались в школе из различных районов внутреннего Юкона. Они принадлежали к различным индейским племенам и не говорили ни на каком языке, кроме английского. По своему происхождению они были потомками кочевого народа, говорившего на различных диалектах языка «атапаскан» и известного под названием кучин, хан или каска.)

Мои собственные усилия построить «лестницу Якова» были столь же энергичны, сколь и безрезультатны. Перепробовав, по-видимому, все неправильные вариации, я в конце концов научился производить нужную последовательность действий, но последний шаг у меня так и не получился, и я

отказался от мысли научить этому узору ребят из своего класса, полагая, что для них он будет слишком сложным.

Месяц или более спустя я как-то вел довольно скучный урок. Мы разбирали слово «доверие», встретившееся нам на уроке правописания. Мы уже выяснили смысл выражений «нарушить доверие», «оправдать доверие». Ни одно из них не вызвало затруднений. Но уяснить различие между выражениями «пользоваться доверием» и «быть облеченным доверием» нам никак не удавалось.

Одна из моих лучших учениц, обычно великолепно схватывавшая смысл всего, о чем говорилось в классе, устав от бесконечных, но, увы, непонятных объяснений, праздно вертела в руках связанный в петлю обрывок нити. Неуловимое движение рук, и... я увидел «лестницу Якова»! Это было незабываемое зрелище. Не помню, что я сказал, но у меня от удивления отвисла челюсть. Мягко, чтобы девочка не подумала, будто я собираюсь ее наказывать, я попытался выяснить, где она овладела искусством плетения веревочного узора.

Но охватившее меня изумление не шло ни в какое сравнение с удивлением ребят, не понимавших, почему меня заинтересовал такой пустяк. Такую безделицу в классе умели делать все! Раз учитель не в своем уме и разрешает заниматься такими вещами в классе, причем ему это, по-видимому, нравится, ну что ж, покажем ему свое искусство! Так я увидел «веник», «чайную чашку», «мальчика на качелях» и множество ромбических узоров. Не помню точно, но скорее всего о «доверии» в тот день больше не было сказано ни слова.

Выяснилось, что в эту игру малышей научили играть ребята постарше. Взрослые припоминали, что когда-то в школьные годы умели сплетать веревочные узоры, но, к кому бы из них я ни обращался, никто не мог вспомнить, как их делать. Тем не менее все уверяли меня, что, «немного попрактиковавшись», смогут снова овладеть утраченным искусством. Игре в веревочку никто из взрослых не придавал никакого значения. «Так, детская забава», — говорили они.

Изображенная на рисунке и описанная в вашей статье «лестница Якова» относилась к числу узоров, которые ребята считали несложными и называли просто «двойкой», «тройкой» и т. д. по числу ромбов в законченном узоре. Малыши без особого труда умудрялись доходить до «шестерки».

...Вы были совершенно правы, утверждая, что эти узоры можно научиться с легкостью выполнять быстрее чем за 10 секунд. Разновидность игры с петлей, надетой на разные руки двух людей, для ребят была новинкой. Они быстро овладели ею и с удовольствием играли в нее...

Примите мою благодарность за вашу статью, позволившую мне сделать столь интересное для себя открытие".

ГЛАВА 23

КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

В повседневной жизни нередко возникает необходимость перевезти с места на место тяжелый предмет. Пользоваться при этом тележкой не всегда удобно: оси ее от большой нагрузки могут прогнуться и даже треснуть. В таких случаях тяжелый предмет кладут на плоскую платформу, установленную на цилиндрических катках. По мере продвижения платформы освободившиеся задние катки заносят вперед и укладывают перед ней. Ни сама платформа, ни покоящийся на ней предмет при движении по ровной горизонтальной поверхности не испытывают вертикальных перемещений по той простой причине, что цилиндрические катки в сечении имеют форму круга, а граница круга — окружность — принадлежит к числу замкнутых кривых, обладающих важным свойством — «постоянной шириной». Если замкнутую кривую поместить между двумя параллельными прямыми и двигать эти прямые до тех пор, пока они не коснутся нашей кривой, то расстояние между параллельными прямыми в момент касания будет называться шириной данной кривой в направлении, перпендикулярном параллельным прямым. Эллипс, очевидно, не имеет одинаковой ширины по всем направлениям: платформа, установленная на катках в форме эллиптического цилиндра, при движении испытывала бы вертикальные перемещения (моряки сказали бы «испытывала дифферент», то есть качку с носа на корму). Именно потому, что окружность имеет одинаковую ширину по всем направлениям, ее можно вращать между двумя параллельными прямыми, не изменяя расстояния между ними.

Существуют ли другие замкнутые кривые постоянной ширины, помимо окружности? Большинство людей считают, что таких кривых нет, показывая тем самым, на-

сколько сильно может вводить в заблуждение математическая интуиция. В действительности кривых постоянной ширины бесконечно много. Любая из них может служить поперечным сечением катка, по которому платформа будет катиться так же ровно, как и по цилиндру. Если бы кривые постоянной ширины не были открыты, незнание их привело бы к самым роковым последствиям в технике! Представим себе, что на кораблестроительном заводе собирают корпус подводной лодки, проверяя его цилиндричность промерами максимального диаметра по всем направлениям. Как мы вскоре узнаем, корпус мог бы быть чудовищно деформированным и тем не менее благополучно пройти подобные испытания. Именно поэтому цилиндричность корпуса подводной лодки проверяется специальными шаблонами.

Простейшая кривая постоянной ширины, отличная от окружности, называется треугольником Рело в честь математика и инженера Франца Рело (1829—1905), преподававшего в Берлинской королевской высшей технической школе. Сама по себе эта кривая была известна математикам и до Рело, но именно он впервые доказал ее удивительное свойство — постоянство ширины. Построить треугольник Рело нетрудно. Прежде всего нужно начертить равносторонний треугольник ABC (рис. 125, *а*), затем провести дугу окружности с центром в точке A, соединяющую вершины B и C, и проделать аналогичную операцию, выбрав центры окружностей в вершинах B и

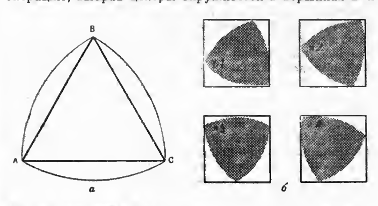


Рис. 125. **Треугольник Рело.**
а — построение; б — вращение внутри квадрата.

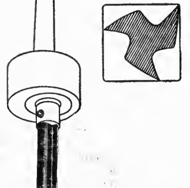
C. Полученный «искривленный треугольник» (как называл эту фигуру Рело), очевидно, обладает постоянной шириной, равной длине стороны прямолинейного треугольника *ABC*.

Если кривая постоянной ширины ограничена двумя парами параллельных прямых и одна пара пересекается с другой под прямым углом, то кривая постоянной ширины с необходимостью должна быть вписана в квадрат. Подобно окружности или любой другой кривой постоянной ширины, треугольник Рело может вращаться в квадрате, плотно прилегая к сторонам последнего, то есть все время касаясь всех четырех сторон квадрата (рис. 125, *б*). Читатель может убедиться в этом, вырезав треугольник Рело из картона и вставив его в квадратное отверстие надлежащих размеров.

При вращении треугольника Рело внутри квадрата каждая из вершин треугольника проходит почти весь периметр квадрата. Небольшие отклонения имеются лишь вблизи вершин квадрата: углы получаются слегка закругленными. Треугольник Рело находит применение во многих механических устройствах, но ни в одном из них не используются его замечательные свойства кривой постоянной ширины. Лишь в 1914 году английский инженер Гарри Джеймс Уаттс изобрел инструмент, имевший в сечении форму треугольника Рело, для сверления квадратных отверстий. С 1916 года одна из фирм приступила к производству сверл Уаттса. «Мы все слыхали о гаечных ключах, приспособленных для гаек с левой резьбой, завязанных в узел водопроводных трубах и бананах из чугуна, — было написано в одной из рекламных листовок этой фирмы. — Мы считали подобные вещи смешными безделушками и отказывались даже верить, что они когда-нибудь встретятся нам в действительности. И вдруг появляется инструмент, позволяющий сверлить квадратные отверстия!».

Сверло Уаттса изображено на рис. 126. Справа показано поперечное сечение сверла внутри квадратного отверстия. Сверление производится так. Сначала на металл накладывают металлический шаблон с квадратным отверстием нужных размеров. Сверло, вращаясь внутри отверстия в направляющей пластине (шаблоне), врезается кромками в металл и просверливает в нем квадратное отверстие. Как видно из рис. 126, сверло Уаттса

Рис. 126. Сверло Уаттса и патрон для зажима сверла.



представляет собой просто-напросто треугольник Рело, в котором прорезаны углубления для отвода стружки и заточены режущие кромки. Когда треугольник Рело вращается, его центр не стоит на месте, поэтому патрон для зажима сверла Уаттса не должен препятствовать этому движению. Компания запатентовала специальный патрон со «свободно плавающим в нем сверлом», удовлетворяющий всем нужным требованиям.

Из всех кривых с заданной постоянной шириной треугольник Рело обладает наименьшей площадью. Если ширина треугольника Рело равна w, то его площадь равна $(\pi - \sqrt{3})w^2$. Углы при вершинах треугольника равны 120°. Это самые «острые» из углов, которые только могут быть у кривой постоянной ширины. Эти углы можно закруглить, продолжив каждую из сторон исходного (прямолинейного) равностороннего треугольника на одно и то же расстояние в обе стороны (рис. 127). Проводя дугу окружности с центром в вершине A, нужно увеличить раствор циркуля и провести затем еще одну дугу окружности (на этот раз FG) также с центром в вершине A. То же нужно проделать и в вершинах B и C. Полученная кривая будет по всем направлениям иметь ширину, равную сумме радиусов дуг, описанных из каждой вершины, то есть будет кривой постоянной ширины. Другие симметричные кривые постоянной кривизны вы построите, взяв вместо равностороннего треугольника правильный пятиугольник (или вообще любой правильный многоугольник с нечетным числом сторон) и проделав над ним аналогичную процедуру.

Существуют способы, позволяющие строить и несимметричные кривые постоянной кривизны. Один из них

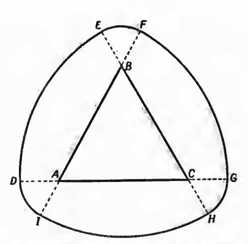


Рис. 127. Симметричная кривая постоянной ширины с закругленными углами.

состоит в следующем. Возьмите звездчатый многоугольник неправильной формы (число вершин у такого многоугольника непременно будет нечетным), образованный отрезками прямых равной длины (на рис. 128 показан звездчатый семиугольник). Поставив ножку циркуля в каждую вершину, проведите дугу окружности, соединяющую две противоположные вершины. Поскольку все дуги имеют одинаковый радиус, получившаяся кривая (на рис. 128 она показана жирной линией) будет кривой постоянной ширины. Ее углы можно закруглить, воспользовавшись для этого уже описанным ранее способом: продолжить стороны звездчатого многоугольника на одно и то же расстояние в обе стороны и соединить концы продолженных отрезков дугами окружностей с центрами в вершинах звезды. Кривая с закругленными вершинами, проведенная на рис. 128 тонкой линией, будет другой кривой постоянной ширины.

Еще один метод построения кривых постоянной ширины показан на рис. 129. Проведите любое число пересекающихся прямых, затем, ставя по очереди ножку циркуля во все точки пересечения, соединяйте каждый раз дугой окружности те две прямые, которые пересекаются в выбранной вами точке. Начать можно с любой точки, а затем продолжать вычерчивание кривой, сопря-

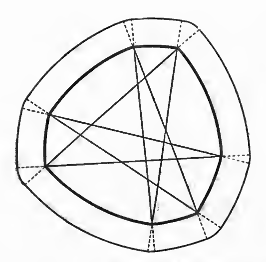


Рис. 128. Построение кривой постоянной ширины методом звездчатого многоугольника.

гая очередную дугу с предыдущей. Если вы провели все дуги достаточно аккуратно, кривая должна замкнуться, и вы получите еще одну разновидность кривых постоянной ширины. (Доказательство того, что кривая действительно должна замкнуться и быть кривой постоянной ширины, мы оставляем читателю в качестве интересного, но нетрудного упражнения.) Все построенные нами до сих пор кривые постоянной ширины были образованы дугами окружностей лишь двух различных радиусов, но с тем же успехом можно было бы строить кривые постоянной ширины из дуг любого наперед заданного числа окружностей.

Более того, кривая постоянной ширины может вообще не состоять из дуг окружности. В самом деле, возьмем квадрат и проведем произвольную кривую, соединяющую его верхнее основание с нижним и касающуюся левой стороны (кривая ABC на рис. 129 справа). Эта кривая будет левой частью некоторой однозначно определенной кривой постоянной ширины. Чтобы построить недостающую правую часть, проведем множество прямых, каждая из которых параллельна одной из касательных к дуге ABC и отстоит от нее на расстояние,

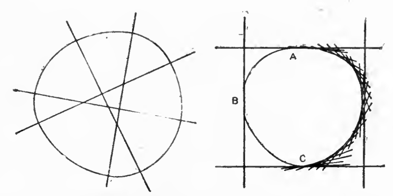


Рис. 129. Построение кривой постоянной ширины методом пересекающихся прямых. Справа показано, как достроить произвольно проведенную дугу до кривой постоянной ширины.

равное длине стороны квадрата. Построить такие прямые нетрудно, если воспользоваться обеими сторонами линейки (исходный квадрат следует выбирать таких размеров, чтобы его сторона была равна ширине линейки). Наложив линейку так, чтобы одна из ее сторон касалась дуги *ABC*, проведите прямую вдоль ее другой стороны. Проделайте эту операцию в как можно большем числе точек дуги *ABC*. Огибающая к проведенным прямым и будет недостающей правой частью кривой постоянной ширины. Этот способ позволяет строить неограниченное число «кривобоких» кривых постоянной ширины.

Необходимо заметить, что дуга *ABC* не вполне произвольна. Грубо говоря, ее кривизна ни в одной точке не должна быть меньше кривизны окружности, радиус которой равен стороне квадрата. Дуга *ABC* не может, например, включать в себя отрезок прямой.

Более точную формулировку требований, предъявляемых к дуге *ABC*, а также подробные доказательства многих элементарных теорем о свойствах кривых постоянной кривизны читатель найдет в главе, посвященной этим кривым, книги Радемахера и Теплица *.

* Г. Радемахер, О. Теплиц, Числа и фигуры, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 10, М., изд-во «Наука», 1966. См. также И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 4, М.—Л., Физматгиз, 1951.

Если у вас есть нужные инструменты и вы умеете резать по дереву, вам будет приятно выточить деревянные катки, имеющие в сечении вид различных кривых постоянной ширины. Большинство людей теряют дар речи при виде толстой книги, которая движется на кривобоких катках строго параллельно поверхности стола, не испытывая никакой качки вверх и вниз. Еще проще демонстрировать необычайные свойства кривых постоянной ширины, если вырезать их из картона и прибить к деревянной планке на некотором расстоянии друг от друга. Кривые могут быть самой различной формы, важно лишь, чтобы гвозди проходили через их «центры». Если взять большую, но легкую картонную коробку, поставить ее на вертикально стоящие картонные кривые, прибитые к планке, и покатать вперед и назад, то вы увидите поразительную картину: оба конца планки совершают вертикальные перемещения, а коробка едет на картонных «колесах» так, как если бы они были круглыми!

Свойства кривых постоянной ширины подробно изучены. Одно из удивительных и трудно доказываемых свойств состоит в том, что все кривые одной и той же постоянной ширины n имеют одинаковые периметры. Поскольку окружность принадлежит к числу кривых постоянной ширины, периметр любой кривой постоянной ширины n равен длине окружности диаметра n, то есть величине πn.

Трехмерные аналоги кривых постоянной ширины называются телами постоянной ширины. Сфера — не единственное тело, которое может вращаться внутри куба, все время касаясь всех шести его граней. Этим же свойством обладают все тела постоянной ширины. Простейшим примером несферического тела постоянной ширины может служить тело, образующееся при вращении треугольника Рело вокруг одной из его осей симметрии (см. левое тело на рис. 130). Существует бесконечно много и других тел постоянной ширины. Те из них, которые имеют наименьший объем при данной ширине, получаются из правильного тетраэдра, так же как треугольник Рело — из равностороннего треугольника: сначала на каждую грань тетраэдра помещают сферические шапочки, а затем слегка скругляют ребра. Ребра либо исходят из одной вершины, либо образуют треугольник.

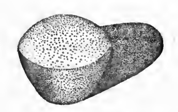
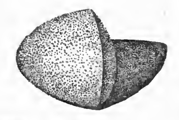



Рис. 130. Два тела постоянной ширины.

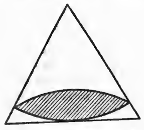
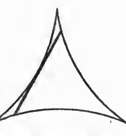



Рис. 131. Ротор наименьшей площади внутри равностороннего треугольника. Справа показан отрезок прямой, вращающийся внутри гипоциклоиды.

Примером такого искривленного тетраэдра постоянной ширины может служить тело, изображенное на рис. 130 справа.

Поскольку все кривые одинаковой постоянной ширины имеют один и тот же периметр, может показаться, будто и все тела одинаковой постоянной ширины имеют одну и ту же площадь поверхности. Однако такое утверждение не верно. Как показал известный математик Герман Минковский, все тени, отбрасываемые телами постоянной ширины (предполагается, что лучи солнца параллельны, а тень падает на плоскость, перпендикулярную лучам), имеют форму кривых постоянной ширины. Периметры всех теней, отбрасываемых телами одной и той же постоянной ширины, одинаковы (и равны πd, где d — ширина тела).

Выпуклая фигура, которая может вращаться внутри многоугольника или многогранника, касаясь все время всех его сторон, называется ротором. Мы видели, что треугольник Рело является ротором минимальной площади для квадрата. Ротор минимальной площади для

равностороннего треугольника показан на рис. 131 слева. Это — фигура в форме линзы (разумеется, ее контур не является кривой постоянной ширины), образованная дугами двух окружностей, радиус которых равен высоте треугольника (каждая дуга составляет 60°). Важно заметить, что концы ротора при вращении описывают весь периметр треугольника, не закругляя углов. К сожалению, технологические трудности не позволяют изготовлять сверла в форме ротора для равностороннего треугольника, но сверла, позволяющие делать отверстия в форме правильных пяти-, шести и даже восьмиугольников с незакругленными углами, имеются. Доказано, что в трехмерном пространстве существуют несферические роторы для правильного тетраэдра, октаэдра и куба, но не для додекаэдра и икосаэдра. Относительно роторов в пространствах большего числа измерений почти ничего не известно.

Непосредственное отношение к теории роторов имеет знаменитая задача об игле, названная в честь сформулировавшего ее еще в 1917 году японского математика Какейя «проблемой Какейя». Заключается она в следующем: в какой плоской фигуре, имеющей минимальную площадь, можно повернуть на 360° единичный отрезок прямой? Такой отрезок, очевидно, можно повернуть на 360° внутри окружности диаметром 1, но ограничиваемый ею круг не будет иметь минимально возможную площадь.

Довольно долго математики считали, что решением проблемы Какейя служит кривая, изображенная на рис. 131 справа, ее площадь равна половине площади круга. (Эта кривая называется гипоциклоидой. Такую кривую описывает точка окружности, катящейся без скольжения внутри большей окружности, если диаметр меньшей окружности составляет $^1/_3$ или $^2/_3$ диаметра большей.) Отломив кусок спички нужных размеров, вы на опыте убедитесь в том, что ее можно повернуть внутри гипоциклоиды как некий одномерный ротор. Обратите внимание, что концы спички будут все время оставаться на контуре гипоциклоиды.

Сенсация произошла в 1927 году, через десять лет после того, как Какейя поставил свою проблему. «Виновником» ее стал А. С. Безикович. Он доказал, что проблема Какейя... не имеет решения! Точнее, из результатов

Безиковича следовало, что не существует кривой с минимальной площадью, внутри которой единичный отрезок можно было бы повернуть на 360°. Сколь бы малой ни была площадь фигуры, всегда можно построить другую фигуру с еще меньшей площадью, внутри которой единичный отрезок также сумеет развернуться на 360°. Представим себе отрезок, простирающийся от Земли до Луны. По теореме Безиковича, его можно повернуть на 360° внутри фигуры, площадь которой меньше площади почтовой марки с изображением Линкольна. Если и этого вам покажется мало, то тот же отрезок можно повернуть на 360° внутри фигуры, площадь которой меньше площади, занимаемой на почтовой марке носом Линкольна.

Доказательство Безиковича слишком сложно, и мы не станем приводить его здесь. Заметим лишь, что фигура, в которой происходит поворот отрезка, не односвязна. Вместо этого читателю предлагается самостоятельно решить следующую более простую задачу. Какой должна быть наименьшая площадь выпуклой фигуры, чтобы внутри нее можно было повернуть на 360° отрезок прямой единичной длины? (Фигура называется выпуклой, если все точки отрезка прямой, соединяющего любые две ее точки, принадлежат фигуре. Квадраты и круги — выпуклые фигуры, греческие кресты и серп луны — невыпуклые.)

ОТВЕТЫ

Выпуклой фигурой с минимальной площадью, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длиной 1 («иглу»), является равносторонний треугольник с высотой 1. Его площадь равна $\sqrt{3}$.

Любая фигура, в которой можно повернуть на 360° единичный отрезок, очевидно, должна иметь ширину, не меньшую чем 1. Из всех выпуклых фигур шириной 1 наименьшую площадь имеет равносторонний треугольник с высотой, равной 1. Доказательство читатель сможет найти в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры». Нетрудно видеть, что внутри такого треугольника отрезок единичной длины и в самом деле можно повернуть на 360° (рис. 132).

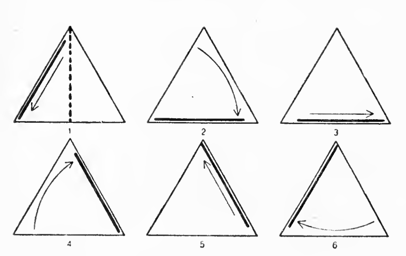


Рис. 132. Ответ к задаче об единичном отрезке.

До 1963 года считалось, что односвязной фигурой с минимальной площадью, внутри которой можно повернуть на 360° единичный отрезок, является гипоциклоида. Правильное решение было найдено в 1963 году независимо друг от друга М. Блумом и И. Дж. Шёнбергом.

ГЛАВА 24

«ДЕЛЯЩИЕСЯ» ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Покрыть плоскость паркетом, все плитки которого имеют форму правильных многоугольников, можно лишь в трех случаях: если плитки имеют форму равностороннего треугольника, квадрата или правильного шестиугольника. Однако существует бесконечно много непра-

вильных многоугольников, которые также позволяют покрыть всю плоскость. Для этого, например, достаточно взять любой треугольник. Совершенно произвольный четырехугольник также годится для покрытия всей плоскости. В этом вы можете убедиться, начертив любой четырехугольник неправильной формы (не обязательно выпуклый) и вырезав штук двадцать его копий из картона. Составлять из таких четырехугольников паркет с плотно прилегающими друг к другу плитками — занятие весьма увлекательное.

Однако плоскость можно покрыть фигурами и более необычным (соответственно менее знакомым) способом. Взгляните на рис. 133, *а*. Каждая трапеция разделена на четыре меньшие трапеции точно такой же формы, как исходная. В свою очередь каждую из четвертушек можно разделить на четыре подобные ей трапеции еще меньших размеров и т. д. Чтобы замостить такими фигурами плоскость, необходимо лишь обратить процесс: из четырех одинаковых фигур данного размера собрать одну подобную им большую фигуру. Английский математик Август Де Морган охарактеризовал аналогичную ситуацию в шуточном стихотворении, первые четыре строки которого перефразируют более раннее шуточное

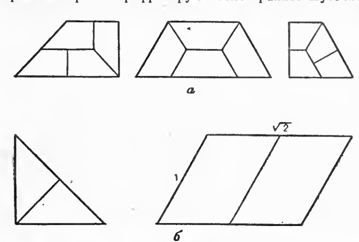


Рис. 133. Делящиеся многоугольники.

а — три делящиеся трапеции (каждая допускает деление порядка 4); *б* — два известных делящихся многоугольника порядка 2.

четверостишие Джонатана Свифта:

Блох больших кусают блошки,
Блошек тех — малютки-крошки,
Нет конца тем паразитам,
Как говорят, *ad infinitum.*
Блоха большая в свой черед
Кусает ту, на ком живет,
Та — блох потолще, шире в талии,
И нет конца им, и так далее.

До недавнего времени о многоугольниках, обладающих любопытным свойством собираться в себе подобные большие или делиться на меньшие, повторяющие форму оригинала, было известно сравнительно немного. В 1962 году Соломон Голомб обратил внимание на эти удивительные фигуры. В результате своих исследований Голомб написал три статьи (не опубликованные им в широкой печати), в которых он заложил основы теории «делящихся» (или «складывающихся») многоугольников. Почти все, о чем мы расскажем в этой главе, заимствовано из этих трех статей.

По терминологии Голомба, многоугольник называется делящимся многоугольником порядка k, если его можно разрезать на k одинаковых подобных ему многоугольников меньшего размера. Например, каждая из трех изображенных на рис. 133, *а* трапеций является делящейся трапецией порядка 4. Делящиеся многоугольники k-го порядка существуют при любом k, однако их меньше всего в тех случаях, когда k — простое число, и больше всего, когда k совпадает с квадратом какого-то числа.

Известно лишь два делящихся многоугольника порядка 2: равнобедренный прямоугольный треугольник и параллелограмм с отношением сторон $1:\sqrt{2}$ (обе фигуры изображены на рис. 133, *б*). Голомбу удалось найти простое доказательство того, что этим исчерпываются все возможные делящиеся треугольники и четырехугольники второго порядка и что никаких других выпуклых делящихся многоугольников второго порядка не существует. Что же касается невыпуклых многоугольников, то существование среди них делящихся фигур второго порядка сомнительно, хотя и не доказано, что их нет.

Внутренние углы параллелограмма с соотношением сторон $1:\sqrt{2}$ могут изменяться, не оказывая никакого влияния на его способность «делиться» (причем

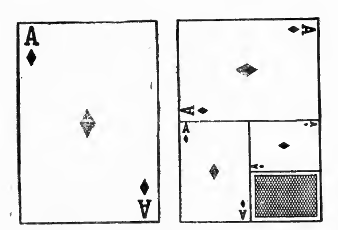


Рис. 134. Фокус с уменьшающейся картой, основанный на использовании делящегося прямоугольника порядка 2.

именно на два подобных исходиому параллелограмма). Прямоугольник с соотношением сторон $1:\sqrt{2}$ почти столь же знаменит в истории искусства, как и «золотой прямоугольник» *. Многие художники средневековья и эпохи Возрождения сознательно выбирали соотношение сторон у холста равным $1:\sqrt{2}$. Иногда показывают такой карточный фокус: туз бубен на ваших глазах трижды уменьшается в своих размерах — каждый раз вдвое (рис. 134). Показывая его, фокусник незаметным движеиием руки складывает карту пополам и показывает зрителям карту вдвое меньших размеров. Если каждая карта имеет форму прямоугольника, подобного исходному, то, как нетрудно показать, соотношение сторон у карт может быть лишь $1:\sqrt{2}$. Делящийся прямоугольник второго порядка находит применение и в не столь легкомысленных областях, как карточные фокусы. Книгоиздатели, желающие стаидартизировать формат книг различных размеров, обиаружат, что страницы изданий *in folio*, *in quarto* или *in octavo* имеют форму делящегося прямоугольника второго порядка. Этот прямоугольник прииадлежит к семейству параллелограммов, изображениых иа рис. 135, *а*. Тот факт, что параллелограмм

* См. главу 23 кингн «Математические головоломки и развлечення».

с отношеиием сторои, равиым $1:\sqrt{k}$, всегда является делящимся параллелограммом порядка k, доказывает, что делящиеся многоугольиики существуют при любом k. Голомб утверждает, что друтне семейства, обладающие делящимнся фнгурами всех порядков, иеизвестиы. При $k=7$ (или при k, равиом любому простому числу вида $4n-1$, большему 3) параллелограммы иазваииого семейства служат едииствеииыми примерами делящихся миогоугольников порядка k.

Сумеет ли читатель самостоятельно иайти делящнеся треугольиики порядков 3 и 5? Такие треугольники существуют.

Делящихся фигур четвертого порядка известио довольио миого. Например, любой треугольиик является делящнмся миогоугольииком порядка 4 (схема его разрезання показаиа иа рис. 135, *б*). Любой параллелограмм также принадлежит к числу делящнхся миогоугольииков порядка 4 (схема его разрезания показаиа иа рнс. 135, *а*). Из других четырехугольииков порядка 4 известны лишь трн трапеции, изображеииые иа рис. 133.

Известеи лишь одии делящийся пятиугольинк пятого порядка: это иапомииающая сфиикса фигура иа рнс. 135, *в*. Его прниадлежиость к делящимся миогоугольиикам четвертого порядка была установлеиа Голомбом. Поскольку иа рис. 135, *в* показаны лишь коитуры «сфиикса», читатель может попытаться самостоятельио найти схему его разрезаиия иа 4 меиьших «сфиикса».

Известиы три разиовидиости делящихся шестиугольников четвертого порядка; если любой прямоугольинк разделить иа четыре равиые части прямыми, параллельными его сторонам, и отбросить одну четвертушку, то оставшаяся фигура будет делящимся шестнугольииком порядка 4. На рис. 135, *г* справа показаиа зиакомая всем любителям головоломок схема разрезаиия шестиугольннка для случая, когда исходиый прямоугольник вырождается в квадрат. Рядом показаиы два других примера делящихся шестиугольииков порядка 4. Каждый из иих можио разрезать на четыре меиьших шестиугольиика ие меиее чем двумя способами.

Если шестиугольиик, изображеииый в середине рис. 135, *г*, разрезать чуть ииаче, чем показано иа рисуике (схему разрезания в каждом из прямоугольииков заменить на ее зеркальное отражение), то всю фигуру можио

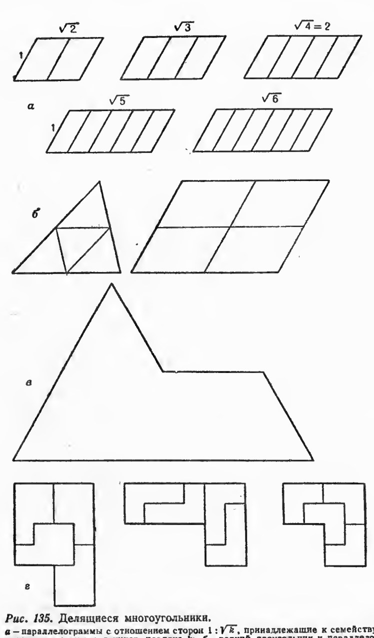


Рис. 135. Делящиеся многоугольники.

а — параллелограммы с отношением сторон $1:\sqrt{k}$, принадлежащие к семейству делящихся многоугольников порядка k; *б* — всякий треугольник и параллелограмм допускают деление порядка 4; *в* — «сфинкс», единственный известный делящийся пятиугольник порядка 4; *г* — три известные разновидности делящихся шестиугольников порядка 4.

подвергать аффинным преобразованиям (вместо прямого внешнего угла в «подбрюшье» фигуры брать любой другой угол, безразлично тупой или острый) и получать делящиеся шестиугольники четвертого порядка. (Только в том случае, когда этот угол равен 90°, фигура допускает деление порядка 9.)

Другие примеры стандартных делящихся многоугольников порядка 4 неизвестны. Однако существуют «лучистые» делящиеся многоугольники порядка 4 (многоугольник называется «лучистым», если он состоит из двух или более подобных ему многоугольников меньших размеров, сходящихся в отдельных точках). Два примера «лучистых» многоугольников, построенных Голомбом, показаны вверху на рис. 136, *а*. В первом примере вместо двух квадратов можно взять любые два одинаковых прямоугольника. Кроме того, Голомб обнаружил три делящиеся фигуры порядка 4, не являющиеся многоугольниками (ни одну из этих фигур нельзя построить за конечное число шагов). Каждая из них (рис. 136, *б*, слева внизу) образуется при бесконечном пристраивании к равностороннему треугольнику все меньших и меньших треугольников (каждый треугольник в 4 раза меньше предыдущего). Во всех трех случаях, взяв три одинаковые фигуры, можно составить из них одну большую фигуру той же формы (как это делается, показано на рис. 136, *б* справа). В каждой уменьшенной копии исходной фигуры имеются «пустоты», обусловленные тем, что оригинал представляет собой бесконечную последовательность треугольников неограниченно убывающих размеров.

Любопытно отметить, что, как правило, делящиеся многоугольники порядка 4 в то же время допускают деление порядка 9. Так, трапецию, которая изображена на рис. 137 (она имеет форму штата Невада на карте США) и является делящимся многоугольником порядка 4, можно разрезать на 9 уменьшенных копий (многими способами). Один из них показан на рис. 137. (Сможет ли читатель самостоятельно найти схемы разрезания всех остальных делящихся многоугольников порядка 4? Речь идет лишь о стандартных многоугольниках. Лучистые фигуры и пределы бесконечных последовательностей фигур неограниченно убывающих размеров, пристраиваемых к исходной, в число стандартных

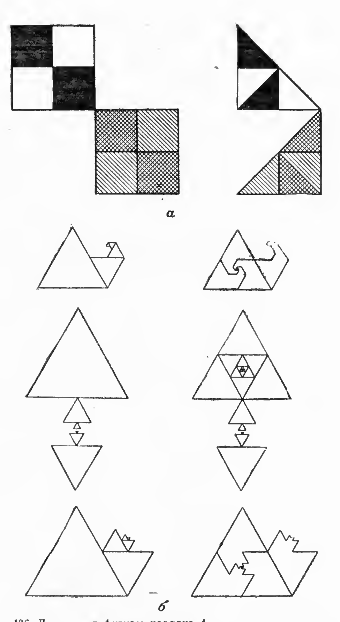


Рис. 136. Делящиеся фигуры порядка 4.

а — два «лучистых» многоугольника порядка 4; *б* — три примера делящихся фигур порядка 4, не являющихся многоугольниками.

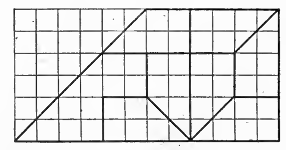


Рис. 137. Делящаяся трапеция. Всякий делящийся многоугольник порядка 4 есть одновременно делящийся многоугольник порядка 9.

а

б

в

Рис. 138. «Лучистые» многоугольники порядка 9.
а — рыба; б — птичка; в — знак &.

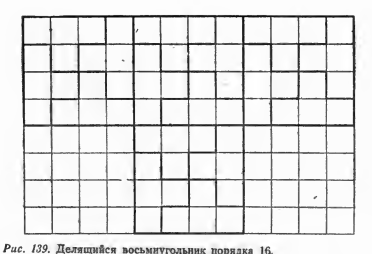


Рис. 139. **Делящийся восьмиугольник порядка 16.**

не входят.) Верно и обратное утверждение: как правило, стандартные многоугольники, допускающие деление порядка 9, одновременно допускают и деление порядка 4. Три интересных примера лучистых многоугольников порядка 9 показаны на рис. 138. Их открыл и дал им названия Голомб. Ни одна из этих фигур не допускает деления четвертого порядка.

Любой метод деления шахматной доски 4 × 4 на четыре одинаковые по форме и величине части (см. главу 21) приводит к фигурам, которые допускают деление 16-го порядка. Необходимо лишь взять четыре экземпляра «минидоски» и сложить из них увеличенную копию каждой четвертушки (см., например, рис. 139). Аналогично деление доски 6 × 6 на четыре одинаковые части (которое можно производить многими способами) позволяет получать делящиеся фигуры 36-го порядка. Равносторонний треугольник также можно разрезать вдоль линий равномерной треугольной сетки и получить фигуру, допускающую деление порядка 36 (рис. 140). Все эти примеры служат иллюстрацией одной простой теоремы, которую Голомб объясняет следующим образом.

Рассмотрим фигуру P, которую можно разрезать на две или на большее число равных фигур, не обязательно подобных фигуре P. Обозначим меньшие фигуры бук-

вой Q. Число таких фигур назовем «кратностью», с которой фигура Q делит фигуру P. Например, изображенные на рис. 140 три шестиугольника делят треугольник с кратностью, равной 3, а меньшие равносторонние треугольники (элементы треугольной сетки) делят эти фигуры с кратностью, равной 12. Произведение обеих кратностей (3×12) указывает порядок деления и для шестиугольника, и для равностороннего треугольника: из 36 шестиугольных фигур можно составить одну шестиугольную фигуру бóльших размеров, а из 36 равносторонних треугольников — один большой равносторонний треугольник. В более абстрактном виде то же можно сформулировать так: если имеются две такие фигуры P и Q, что фигура P делит фигуру Q с кратностью s, а Q делит P с кратностью t, то обе фигуры допускают деление на себе подобные фигуры меньших размеров порядка st. Разумеется, каждая из фигур одновременно может быть делящейся фигурой и меньших порядков. В приведенном примере равносторонний треугольник является делящимся многоугольником не только порядка 36, но также и порядков 4, 9, 16 и 25.

Если фигуры P и Q подобны, то из теоремы Голомба следует, что каждая из них есть делящаяся фигура не только порядка k, но и порядка k^2, k^3, k^4 и т. д., то есть любого порядка, совпадающего с одной из целых

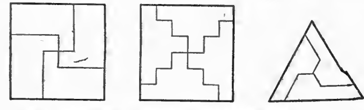


Рис. 140. Три делящихся многоугольника порядка 36.

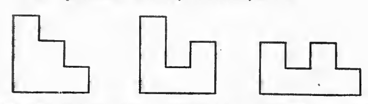


Рис. 141. Три делящихся многоугольника порядка 144.

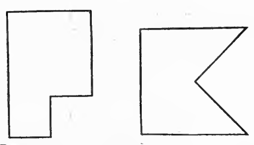


Рис. 142. Две задачи на разрезание.

степеней k. Другое следствие из теоремы Голомба: если данная фигура допускает деление на подобные себе фигуры порядков s и t, то она также допускает деление на подобные фигуры порядка st.

Принцип, лежащий в основе теоремы, допускает обобщение. Если P делит Q с кратностью s, Q делит R с кратностью t и R делит P с кратностью u, то каждая из фигур P, Q и R является делящейся фигурой порядка stu. Например, каждая из фигур гексамино на рис. 141 делит прямоугольник 3×4 с кратностью 2. В свою очередь прямоугольник 3×4 делит квадрат с кратностью 12, а квадрат делит каждую из фигур гексамино с кратностью 6. Следовательно, фигуры гаксамино являются делящимися фигурами порядка $2 \times 12 \times 6 = 144$. По-видимому, только правый и левый многоугольники не могут быть делящимися фигурами меньшего порядка, но это предположение не доказано. Средний многоугольник одному из наших читателей удалось разрезать на 36 одинаковых многоугольников меньших размеров, подобных исходному. Схему разрезания я не привожу, чтобы не лишать остальных читателей удовольствия самостоятельно ее открыть.

Голомб обратил внимание на то, что все известные делящиеся многоугольники порядка 4, в том числе и лучистые, делят параллелограмм с кратностью 2. Иначе говоря, из двух экземпляров любого делящего многоугольника четвертого порядка всегда можно составить параллелограм! Это предположение остается пока недоказанным.

Мы затронули лишь наиболее элементарные результаты основополагающей работы Голомба по теории «делящихся» фигур. Она допускает очевидное обобщение

на случай пространства трех и большего числа измерений. Тривиальным примером делящегося тела служит куб: его очевидным образом можно разделить на 8, 27 и т. д. меньших кубов. Другими тривиальными примерами служат обычные плоские делящиеся фигуры, выпиленные из доски одинаковой конечной толщины. Существуют и менее тривиальные примеры делящихся пространственных тел. Изучение их, по-видимому, позволит получить новые важные результаты.

Помимо уже поставленных задач, приведем еще две необычные задачи на разрезание, имеющие непосредственное отношение к теории делящихся фигур (рис. 142). Первая, более легкая, задача формулируется так: можно ли разделить шестиугольник, изображенный на рис. 142 слева, на два равных лучистых многоугольника? Вторая задача труднее: пятиугольник, изображенный на рис. 142 справа, нужно разделить на 4 равных лучистых многоугольника. Ни в первой, ни во второй задаче части не должны быть подобны исходной фигуре.

ОТВЕТЫ

Решение задачи о разрезании «сфинкса» представлено на рис. 143 вверху. Следующие две схемы показывают, как по-

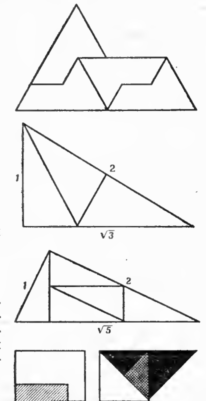


Рис. 143. **Решение задач на разрезание.**

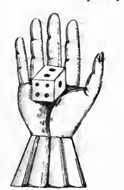
строить делящиеся треугольники порядков 3 и 5. Внизу приведены решения двух задач на разрезание с использованием лучистых многоугольников. Первая из них допускает бесконечно много различных решений, мы приводим одно из простейших. Второе решение «с бородой», о нем писал еще Сэм Лойд, но известно оно было и до него.

ГЛАВА 25

ДВАДЦАТЬ ШЕСТЬ КАВЕРЗНЫХ ВОПРОСОВ

Предлагая вашему вниманию 26 небольших задач, автор надеется, что кто-нибудь из читателей угодит в расставленные ловушки. Большинство вопросов относится к числу задач-шуток, и лишь немногие из них имеют сколько-нибудь серьезный математический смысл. Однако читатель не должен заглядывать в ответ, прежде чем попытается (хотя бы «в полсилы») ответить на возможно большее число вопросов.

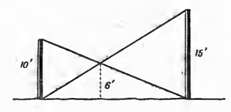
1. Физик, устав, лег спать в десять часов вечера; предварительно он завел будильник на 12 часов следующего дня. Сколько часов он успеет проспать, прежде чем будильник его разбудит?



2. Джо и Мо бросают по очереди обычную игральную кость. Первым бросает Джо, вторым — Мо. С какой вероятностью Джо выбросит больше очков, чем Мо?

3. Какое выражение по смыслу совершенно противоположно выражению «не в...».

4. На ровной площадке на некотором расстоянии от столба высотой 10 футов стоит столб высотой 15 футов. Если вершину каждого столба соединить прямой с основанием другого столба, то обе прямые пересекутся в точке, находящейся на высоте 6 футов над поверхностью площадки. Чему равно расстояние между столбами?



5. — Сколько стоит один?

— Двадцать центов, — ответил клерк в магазине хозяйственных товаров.

— Сколько стоит двенадцать?

— Сорок центов.

— Хорошо, дайте мне девятьсот двенадцать.

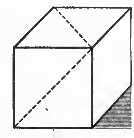
— С вас причитается шестьдесят центов.

Что покупал посетитель?

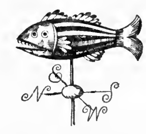
6. Стороны треугольника равны 13, 18 и 31 см. Чему равна площадь треугольника?

7. Джон Кеннеди родился в 1917 году. Был избран президентом США в 1960 году. В год выхода книги (1963) ему исполнилось 46 лет, он уже пробыл на президентском посту 3 года. Сумма четырех названных чисел равна 3926. Шарль де Голль родился в 1890 году. Президентом Франции он стал в 1958 году. Когда ему исполнилось 73 года, он уже 5 лет находился на посту президента. Сумма четырех названных чисел и на этот раз равна 3926. Как объяснить столь замечательное совпадение?

8. Чему равен угол между двумя пунктирными прямыми, проведенными на поверхности изображенного здесь куба?



9. Бассейн имеет форму прямого кругового цилиндра. Рыба отплывает от стенки бассейна и, следуя на одной и той же глубине, снова оказывается у стенки, проплыв строго на север 6 м. Натолкнувшись на стенку, рыба поворачивает, плывет строго на восток и, пройдя 8 м, снова оказывается у стенки. Чему равен диаметр бассейна?



10. Как-то раз всем жителям поселка с населением в 6000 человек статистик предложил серию математических тестов, одновременно он измерил у них длину ступни. Оказалось, что между размером ноги и математическими способностями существует сильная корреляция. Как это объяснить?

11. Напишите простую формулу, содержащую лишь одну переменную x и обладающую следующим свойством: при подстановке вместо x любого целого положительного числа формула должна давать значение какого-нибудь простого числа.

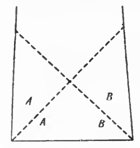
12. Посреди большого треугольного участка земли некто решил построить дом и проложить от него к границам участка три прямые дорожки. Каждая дорожка ведет от дома к какой-то из сторон участка и перпендикулярна этой стороне. Участок имеет форму равностороннего треугольника. Где следует расположить дом,

чтобы сумма длин всех трех дорожек была минимальной?

13. Разделите 50 на $1/2$ и прибавьте 3. Сколько вы получили?

14. Тополог купил семь бубликов и съел все их, кроме трех. Сколько бубликов у него осталось?

15. На нашем рисунке пунктиром проведены биссектрисы углов при основании треугольника. Они пересекаются под прямым углом. Чему равна высота треугольника, если его основание равно 10 см?



16. Сколько месяцев в году содержат по 30 дней?

17. Миссис Смит решила бросить курить после того, как докурит пачку, в которой осталось девять сигарет. Из трех окурков она может делать одну самокрутку, по

количеству табака равную одной сигарете. Сколько «сигарет» она выкурит, прежде чем совсем бросит курить, если самокрутки из своих окурков ей разрешается делать неограниченное число раз?

18. — Вот вам три пилюли, — сказал доктор. — Принимайте по одной через каждые полчаса.

Вы покорно соглашаетесь. Насколько вам хватит прописанных доктором пилюль?

19. 137 человек записались для участия в соревнованиях по теннису, проводимых по олимпийской системе. Для игр первого круга все игроки должны разбиться на пары, но, поскольку 137 — нечетное число, одному игроку нехватает партнера и ему разрешается перейти в следующий круг без игры. Разбиение игроков на пары производится в каждом круге, и каждый раз один из игроков, оставшись без партнера, переводится в следующий круг. Сколько игр будет сыграно, прежде чем

определится чемпион, если программа соревнований составлена с таким расчетом, чтобы свести число встреч до минимума?

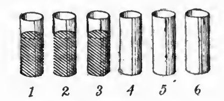
20. Рыба весит 8 кг плюс половина ее собственного веса. Сколько весит рыба?

21. Английский математик Д. Дж. Принц обнаружил следующее симметричное выражение:

$$X = \frac{|||}{|||} = |||\ |||$$

Чему равен X? (Наборы из трех вертикальных черточек можно интерпретировать тремя различными способами.)

22. Расставьте 6 стаканов в ряд так, как показано на нашем рисунке. Три первые стакана наполнены водой, три последние пусты. Что нужно сделать, чтобы пустые и полные стаканы чередовались, если трогать разрешается лишь один (но любой) стакан.



23. В колесе 10 спиц. Сколько промежутков между спицами?

24. «Число слов в этом предложении равно семи». Приведенное утверждение, очевидно, истинно. Придумайте предложение, имеющее прямо противоположный смысл, но остающееся тем не менее истинным.

25. Две девочки родились в один и тот же день одного и того же месяца в один и тот же год и у одних и тех же родителей, но они не «двойняшки». Объясните, как это может быть.

26. Предположим, что кто-нибудь предлагает вам заключить пари на следующих условиях: ваш партнер ставит 1 доллар и утверждает, что если вы дадите ему 5

долларов, то он даст вам сдачи 100 долларов. Выгодно ли заключать такое пари?

ОТВЕТЫ

1. Два часа (будильник зазвонит в 12 часов ночи).

2. $^5/_{12}$. Вероятность, что Джо и Мо выбросят одинаковое число очков, равна $^1/_6$; следовательно, вероятность того, что число очков будет разным, равна $^5/_6$, или $^{10}/_{12}$. Половина этой величины дает вероятность того, что Джо выбросит больше очков, чем Мо.

3. «В».

4. Расстояние между столбами может быть любым: расстояние от точки пересечения прямых, соединяющих верхушку одного столба с основанием другого до земли, равно отношению произведения высот двух столбов к их сумме.

5. Номер для дома.

6. Нулю.

7. Любая дата, если к ней прибавить число лет, прошедших после нее до какой-то следующей даты (в нашем примере 1963 год), даст вторую дату, поэтому суммы равны между собой (и каждая из них равна $1963 \times 2 = 3926$).

8. 60°. Сединив концы пунктирных прямых, вы получите равносторонний треугольник.

9. 10 м. Наткнувшись первый раз на стенку, рыба изменяет курс на 90°. Стороны прямого угла, вершина которого лежит на окружности, пересекают окружность в диаметрально противоположных точках. Следовательно, диаметр бассейна служит гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 м.

10. Слова «всем жителям» в условии задачи следует понимать буквально: тестированию подвергались грудные младенцы, дети, взрослые и глубокие старики.

11. Таких формул много, например $2 + 1^x$; $0^x + 3$; $2 + x/x$ и т. д.

12. В любом месте участка. Сумма длин трех дорожек постоянна и равна высоте треугольника, форму которого имеет участок.

13. 103.

14. Три бублика.

15. Бесконечности. Углы A и B в сумме составляют 90°. Углы при основании треугольника ($2A$ и $2B$) в сумме составляют 180°. Следовательно, угол при вершине треугольника должен быть равен 0°, а боковые стороны треугольника должны быть параллельны друг другу и пересекаться в бесконечности.

16. Все месяцы, кроме февраля.

17. Тринадцать. Некоторые читатели считают, что миссис Смит недопустимо расточительна, поскольку окурок от последней самокрутки остается неиспользованным. Было бы лучше, полагают они, если бы миссис Смит решила бросить курить, когда у нее в пачке оставалось 10 сигарет. После того как она выкурила 14 «сигарет» (то есть количество табака, содержащееся в 14 целых сигаретах), у нее осталось бы 2 окурка. Покопавшись в пепельнице, она могла бы найти чей-нибудь третий окурок, а выкурив свою пятнадцатую — и последнюю — сигарету, вновь вернуть его в пепельницу.

18. На один час.

19. Поскольку выбыть должны 136 теннисистов, должно быть сыграно 136 игр.

20. 16 кг.

21. $X = \frac{111}{3} = 37$.

Три вертикальные черточки в числителе означают число 111, записанное в обычной десятичной системе счисления, три вертикальные черточки в знаменателе — римское число 3. Первые три вертикальные черточки в правой части также означают римское число 3, а следующие три вертикальные палочки — число 7, записанное в двоичной системе счисления.

22. Перелить воду из второго стакана в пятый и поставить второй стакан на место.

23. Тоже 10.

24. «Число слов в этом предложении не равно семи».

25. Девочки-близнецы, родившиеся вместе с братом или с еще одной сестрой («тройня»).

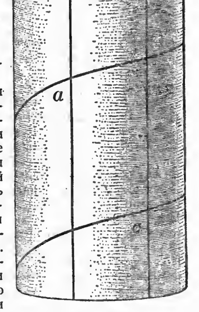
26. Невыгодно. Взяв ваши 5 долларов, партнер по пари может сказать: «Я проиграл», — и вручить вам свой доллар. Вы выиграете пари, но потеряете 4 доллара.

ГЛАВА 26

ОТ ШТОПОРА ДО ДНК

Прямой меч плотно, без зазора входит в прямые ножны. То же относится и к мечу, изогнутому в форме дуги окружности: его всегда можно вложить в ножны той же кривизны. Именно это свойство имеют в виду математики, называя иногда прямые и окружности «самоконгруэнтными» кривыми: при перемещении вдоль самоконгруэнтной кривой любой ее дуги последняя никогда «не сходит с рельсов», то есть в любой момент времени

Рис. 144. Спираль, навитая на круговой цилиндр (жирная линия).



совпадают с соответствующим участком кривой.

Можно ли придумать меч и ножны какой-нибудь другой формы, отличной от отрезка прямой или дуги окружности? Даже после тщательного размышления многие ответят, что никакой другой формы придумать нельзя, но они заблуждаются. Существует третья самоконгруэнтная кривая — цилиндрическая спираль. Это кривая, которая, закручиваясь вдоль поверхности цилиндра, пересекает все его образующие под одним и тем же углом. Посмотрите на рис. 144. Вертикальные прямые, параллельные оси цилиндра, мы будем называть образующими; буквой a обозначен постоянный угол, который образует спираль с каждой образующей. Поскольку кривизна во всех точках спирали одинакова, спиральный меч можно без труда ввернуть в спиральные ножны и столь же легко вывернуть его обратно.

В действительности прямую и окружность можно рассматривать как предельные случаи цилиндрической спирали. Если витки такой спирали плотно прижать друг к другу, получится спираль похожая на так называемую «шагающую пружину» *. При увеличении угла a до 90° спираль сжимается в окружность.

* Шагающая пружина (Slinky toy) — распространенная в США игрушка. Это металлическая пружина с очень плотно расположенными витками. Поставленная на наклонную плоскость, она начинает «шагать», кувыркаясь и попеременно поднимая и опуская то один конец, то другой. Остановившись внизу, пружина еще некоторое время покачивает кольцами, как бы пытаясь отдышаться после трудного спуска. — *Прим. перев.*

С другой строны, растягивая спираль до тех пор, пока угол a не обратится в нуль, вы превратите ее в прямую линию. Если на пути параллельных световых лучей, падающих на стену под прямым углом, поместить цилиндрическую спираль, ось которой также перпендикулярна стене, то возникшая на стене тень будет иметь форму окружности. Если же ось спирали будет перпендикулярна лучам, то на стене появится синусоида.

Каждая спираль, цилиндрическая или же любой другой формы, — это асимметричная пространственная кривая, отличная от своего зеркального отражения. Мы будем называть ее «правовинтовой», если витки спирали «по мере продвижения» закручиваются по часовой стрелке, как обычное сверло или штопор. Поднесите к зеркалу такой штопор, и вы увидите, что его отражение, говоря словами Алисы *, «ведет себя совершенно наоборот». Штопор в зеркале в отличие от штопора у вас в руке будет левовинтовым. Раздобыв такой штопор, вы сможете разыграть над кем-нибудь из друзей забавную шутку. Все мы до такой степени не привыкли к левой резьбе, что ваша жертва в течение нескольких минут будет тщетно бороться со штопором, пока, наконец, не поймет, что его его надо вворачивать против часовой стрелки.

За исключением винтов, болтов и гаек, которые по стандарту полагается делать правовинтовыми (левовинтовыми их делают лишь для некоторых специальных целей), все остальные спирали, изготовленные человеком, обычно бывают и право- и левовинтовыми — длинные витые конфеты, винтовые лестницы, канаты и кабели, свитые из крученых шнуров и проводов и т. д. Конические спирали (то есть спирали, навитые на поверхность конуса), например пружины в матрасах или же спиральные коридоры, подобные коридорам музея Гугенхейма **, здание которого построено в форме перевернутой конической спирали, расширяющейся кверху, также могут быть право- и левовинтовыми.

* Героиня книг Льюиса Кэррола «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». Цитируемое выражение взято из второй книги. — *Прим. перев.*

** Музей искусства XX века в Нью-Йорке. — *Прим. перев.*

В природе же все устроено совсем не так! Спиральные образования, которыми изобилуют живые организмы, от простейшего вируса до частей человеческого тела, с помощью генетического кода почти всегда получают точную информацию о том, в какую сторону им закручиваться. Более того, носителем генетического кода служат гигантские молекулы нуклеиновой кислоты, которые (по мнению большинства биохимиков) всегда закручены по правовинтовой спирали. Но и это еще не все. С тех пор как появились первые работы Л. Полинга, посвященные спиральному строению молекул протеина, все большее число фактов говорит о том, что существующие в природе гигантские протеиновые молекулы имеют «остов» закрученный по правовинтовой спирали. У молекул нуклеиновой кислоты и протеина такой остов представляет собой цепочку, состоящую из асимметричных элементов — отрезков спиралей, закрученных в одну и ту же сторону. После прохождения каждого такого элемента вся цепь совершает очередной полный оборот вокруг оси. Нечто подобное мы испытываем, поднимаясь по ступеням винтовой лестницы.

У животных, обладающих двухсторонней (или, как еще говорят, билатеральной) симметрией, более крупные спиральные образования обычно встречаются попарно — по одному с каждой стороны тела животного. Каждая из двух спиралей, образующих пару, переходит в другую при зеркальном отражении. Эффектными примерами этого могут быть рога баранов, козлов, антилоп и других млекопитающих (рис 145). У человека ушная улитка имеет форму конической спирали: в правом ухе — правовинтовую, в левом — левовинтовую. Любопытным исключением является зуб нарвала — небольшого кита, который обитает в водах северных морей. Это необычное животное появляется на свет с двумя верхними зубами. У самки оба зуба скрыты в челюсти. У самца правый зуб также скрыт в челюсти, зато левый зуб начинает расти вперед и торчит изо рта, словно копье. Размер его достигает почти трех метров, то есть превышает половину длины животного от кончика носа до кончика хвоста! Весь зуб обвит спиральными бороздками, закручивающимися против часовой стрелки от основания зуба к его концу (рис. 146). Казалось бы, в тех редких случаях, когда оба зуба превращаются в бивни, желобки на правом

Рис. 145. Рога памирского барана, закрученные в противоположные стороны.

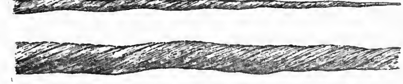


Рис. 146. Бивни нарвала, имеющие всегда левовинтовую нарезку.

Рис. 147. Три раковины, имеющие форму правовинтовых конических спиралей.

зубе должны были бы закручиваться по часовой стрелке. В действительности же спираль на правом зубе тоже оказывается левовинтовой. Мнение зоологов по поводу причин этого явления расходятся. Д'Арси Томпсон на страницах книги «Рост и форма» («On Growth and Form») отстаивает свою собственную теорию, согласно которой кит, плавая в воде, все время делает еле заметное винтовое движение вправо. Из-за огромной массы бивня у его основания должен создаваться противодействующий вращательный момент, который и закручивает бивень против часовой стрелки.

Если в строении любых растений и животных встречается непарная спираль, то у каждого вида она обычно бывает лишь одного, характерного именно для данного вида направления. Это верно как для несчетного множества спиралевидных бактерий, так и для сперматозоидов высших животных. Человеческая пуповина состоит из одной вены и двух артерий, образующих тройную спираль, которая всегда закручена влево. Самыми удивительными примерами являются раковины улиток и других моллюсков, свернутые в коническую спираль. Далеко не всегда можно говорить о том, в какую сторону закручена раковина. Например, плоскую раковину наутилуса можно, подобно спиральной туманности, рассечь пополам на две совершенно одинаковые части: правую и левую. Однако существуют тысячи красивейших раковин, образующих либо правую, либо левую спираль (рис. 147). У одних моллюсков раковины бывают закручены только вправо, у других — только влево. Некоторые виды моллюсков в одной местности всегда закручивают свою раковину вправо, а в другой — влево. Изредка попадающиеся «уродцы», закрученные в «обратную» сторону, очень высоко ценятся коллекционерами.

В штатах Небраска и Вайоминг находят очень странные спиральные окаменелости, известные под названием «чертов штопор» (Daemonelix). Эти огромные спирали, достигающие почти двухметровой высоты, бывают закручены и вправо и влево. В течение десятилетий не прекращались споры геологов об их происхождении. Одни считали, что это окаменевшие древние растения, другие — что это спиральные норы, прорытые предками современных бобров. В конце концов восторжествовала «бобро-

Рис. 148. Игрушка из двух спиралевидных проволочек, которую можно рассматривать как модель рождения нейтрино и антинейтрино.

вая теория», потому что в некоторых штопорах обнаружились бобровые останки.

В мире растений спирали встречаются на каждом шагу: в строении соцветий шишек, листьев, цветов, усиков и даже в самом расположении листьев и ветвей вокруг ствола дерева. Число витков спирали, которое необходимо сделать, чтобы перейти от нижнего листа к ближайшему верхнему, равно одному из чисел широко известного ряда Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (каждый член этого ряда равен сумме двух предыдущих *). Это явление в ботанике носит название «филлотаксиса» (филлотаксис — расположение листьев); его неожиданной связи с числами Фибоначчи посвящена обширная литература.

Стебли вьющихся растений обычно закручиваются по правой спирали, однако многие разновидности лазящих растений сосуществуют парами, причем стебли растений-партнеров закручиваются в противоположных направлениях. Жимолость, например, всегда закручивается по левой спирали, а вьюнок — по правой. Их страстные «объятия» долгие годы пленяли английских поэтов.

Направление спирали — понятие весьма условное и целиком зависящее от того, какую спираль мы условимся называть правой, а какую — левой. Вворачивая сверло с правой резьбой, взгляните на него с другой стороны и вы увидите, что приближаясь к вам, точки шурупа движутся против часовой стрелки, следовательно, его резьбу с тем же успехом можно назвать левовинтовой.

Около сорока лет назад в Америке появилась замечательная игрушка, основанная на оптическом эффекте, возникающем при закручивании двух противоположно направленных спиралей. Эту игрушку несложно сделать из двух проволочек, если их предварительно закрутить в противоположных направлениях. Сцепив проволочки

* Интересно заметить, что в 1963 году в Америке был даже основан специальный журнал *The Fibonacci Quarterly*.

между собой, как показано на рис. 148, припаяйте их друг к другу в нескольких точках, чтобы получилась жесткая конструкция. Возьмите за ее концы (имеются в виду концы двойного участка) большими и указательными пальцами обеих рук. Если теперь много раз подряд сближать и разводить руки, то пальцы будут перемещаться параллельно оси пружины и вся конструкция начнет вращаться. У зрителей при этом возникает ощущение, будто пружина каким-то непонятным образом все время вытягивается из безнадежно запутанного бесконечного клубка. Поскольку нейтрино и антинейтрино обладают противоположной спиральностью, мне кажется, что такая игрушка может служить наглядной моделью бесконечного рождения нейтрино и его зеркальных двойников.

Спиральный характер траектории нейтрино связан с тем, что эта частица обладает спином и поэтому участвует одновременно в двух движениях: поступательном движении вперед (со скоростью света) и вращении вокруг некоторой оси. По спирали перемещаются не только неодушевленные предметы, но и представители живой природы: любая точка (кроме осевой) вращающего винта самолета или парохода; белка, взбегающая вверх или спускающаяся вниз по дереву; стаи летучих мышей, вылетающие из подземных пещер. В качестве примеров конической спирали можно привести водовороты, воронки ураганов, траекторию точек воды, стекающей по желобу, и тысячи других явлений природы.

Со спиралью связана и следующая несложная головоломка.

На боковой поверхности вращающегося цилиндра нарисованы три спирали: красная, белая и синяя. Высота цилиндра равна 120 см. Красная линия пересекает все образующие цилиндра (прямые на поверхности цилиндра, параллельные его оси) под постоянным углом 60°. Требуется найти длину красной линии.

На первый взгляд кажется, что для определения длины в приведенном условии не хватает данных. На самом же деле при правильном подходе задача решается до смешного просто.

ОТВЕТЫ

Если прямоугольный треугольник обернуть вокруг цилиндра так, чтобы его основание совпало с окружностью,

лежащей в основании цилиндра, то гипотенуза треугольника образует спираль. Представим себе, что в предложенной задаче красная линия является гипотенузой треугольника. «Развернем» этот треугольник. Его углы будут равны 30 и 60°, следовательно, длина гипотенузы будет вдвое больше длины катета, лежащего против угла в 30°. (Это легко увидеть, составив из двух таких треугольников один равносторонний.) Длина этого катета по условию составляет 120 см, следовательно, длина гипотенузы (красной линии) равна 240 см.

Интересно, что эта величина не зависит не только от диаметра цилиндра, но и от формы его основания. Основание может быть ограничено любой неправильной замкнутой кривой; ответ от этого не изменится.

ГЛАВА 27

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Раз моряки погожим днем
Пустились по морю втроем,
Но не в тазу — была у них
Бутылка Клейна на троих.
Три моряка в бутылку сели
В ней не страшны ни шторм, ни мели.
Но оказалось им на горе
И судно в море, и в судне море.

Фредерик Уинзор

С точки зрения тополога, квадратный лист бумаги представляет собой модель двухсторонней поверхности с одним краем. Свойства эти оказываются очень глубокими: даже если вы скатаете лист бумаги в шарик, он все равно останется двусторонней поверхностью с одним краем. Более того, представим себе, что наш лист вырезан из резины. Растянув, вы сможете превратить его в треугольник или круг, но он по-прежнему останется двусторонней поверхностью с одним краем. «Двусторон-

ность» и «однокрайность» — топологические свойства поверхности — свойства, которые остаются неизменными, как бы вы ни растягивали, ни сжимали, ни перекручивали и ни перегибали данную поверхность.

Для каждой поверхности существуют еще два других не менее важных топологических инварианта: хроматическое число и число Бетти. Хроматическое число — это максимальное число областей, на которые можно разбить поверхность так, чтобы каждая область имела общую границу с любой из остальных областей. Если каждую область выкрасить в свой цвет, то какую бы пару цветов мы ни задумали, всегда найдутся примыкающие друг к другу две области, выкрашенные именно в эти два цвета. Для квадратного листа хроматическое число равно 4. Иными словами, квадрат нельзя разделить на такие пять областей, чтобы каждая пара областей имела общую границу. (Это утверждение не следует путать со знаменитой проблемой четырех красок — в ней речь идет о картах, на которых изображено любое конечное число областей.) Число Бетти, названное в честь итальянского физика прошлого века Энрико Бетти, равно числу разрезов, которые можно провести на поверхности так, чтобы она не распалась на два отдельных куска. Если поверхность имеет края, то каждый разрез должен быть «трансконтинентальным», то есть идти от одной точки какого-то края до другой точки края (быть может, другого). Если поверхность замкнутая, то есть без края, то каждый разрез должен иметь форму какой-нибудь простой замкнутой кривой (такой разрез мы будем называть замкнутым). Ясно, что для квадратного листа бумаги число Бетти равно нулю: любой разрез «от края и до края», очевидно, делит квадрат на два отдельных куска.

Если, соединив две противоположные стороны квадрата, склеить из него трубку, то получится модель поверхности, топологически отличной от квадрата. Эта новая поверхность пока еще является двусторонней, но край ее состоит уже из двух отдельных замкнутых простых кривых. Хроматическое число такой поверхности, как и у квадрата, равно 4, а число Бетти равно 1: если на этой поверхности провести разрез «от края и до края», то она перестает быть трубкой, но не распадется на два отдельных куска.

Третий тип поверхности, топологически эквивалентной поверхности сферы или куба, можно получить, перегнув квадрат по диагонали, а затем склеив его края. Поверхность при этом останется двусторонней, но края у нее больше не будет. Это означает, что поверхность замкнута. Хроматическое число такой поверхности будет попрежнему равно 4, а ее число Бетти равно 0: любой замкнутый разрез, очевидно, делит поверхность на две отдельные части.

Гораздо более интересный результат получится, если, прежде чем склеивать противоположные стороны квадрата, мы перекрутим его на пол-оборота. Если квадрат вырезан из бумаги, то на первый взгляд перекрутить его невозможно; на самом же деле достаточно лишь сложить квадрат вдоль диагоналей так, как показано на рис. 149. Соединив между собой пару обозначенных стрелкой сторон, вы получите хорошо известный лист Мёбиуса, впервые изученный немецким астрономом прошлого века А. Ф. Мёбиусом, который одним из первых занялся изучением топологических свойств геометрических фигур. Вывернуть склеенную модель нельзя, поэтому понять, что действительно получился лист Мёбиуса, далеко не просто, однако при более тщательном рассмотрении в этом все же можно убедиться. Получившаяся поверхность односторонняя, с одним краем, ее число Бетти равно 1. Хроматическое же число у этой поверхности резко возрастает по сравнению с предыдущими и становится равным 6: на построенной поверхности можно так расположить 6 областей, выкрашенных в 6 различных цветов, что каждая область будет иметь общую границу с каждой из пяти остальных.

Склеим попарно, не перекручивая, противоположные стороны квадрата. При этом получится поверхность, называемая тором. Она топологически эквивалентна поверхности бублика или куба, в котором просверлено сквозное отверстие. Из рис. 150 видно, как просто делается плоская квадратная модель тора. Нужно вдвое сложить квадрат и склеить его стороны вдоль черной прямой на правом верхнем рисунке, а затем склеить концы получившейся трубки так, как показано стрелками на нижнем рисунке. Тор — это замкнутая (то есть без края) двусторонняя поверхность с хроматическим числом, равным 7, и с числом Бетти, равным 2. Два

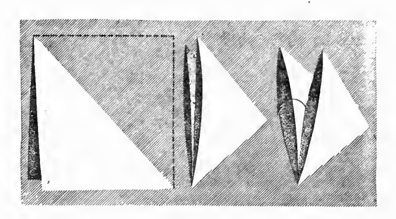


Рис. 149. Как сделать из квадратного листа бумаги лист Мёбиуса.

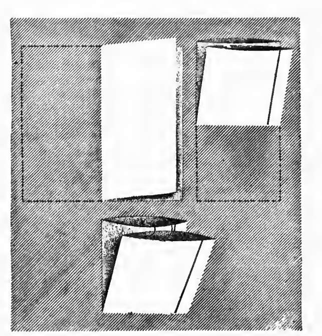


Рис. 150. Как сложить тор из квадратного листа бумаги.

разреза на торе можно провести, например, так: сначала сделать замкнутый разрез вдоль меридиана, по которому была склеена вторая пара сторон квадрата (тор после этого снова превратится в трубку), а затем провести «трансконтинентальный» разрез вдоль прямой, по которой мы склеим первую пару сторон. Строго говоря, если, не разрезая тор, просто нарисовать оба разреза на его поверхности, то каждый из них будет замкнутым. Второй же разрез оказался разрезом «от края и до края» лишь потому, что мы проводим разрезы не одновременно, а по очереди.

Разрезая тор разными способами, трудно заранее предугадать результат. Разрежем, например, нашу модель тора пополам вдоль горизонтальной или вертикальной средней линии, параллельной сторонам квадрата. Оба разреза замкнутые, один из них образует на поверхности тора «параллель», другой — «меридиан». Каждый из разрезов превращает тор в трубку. Если же модель тора разрезать по любой из диагоналей, то каждая половинка окажется квадратом. Попробуйте придумать, как провести два таких замкнутых разреза, которые бы превращали тор в два кольца, подобных звеньям цепи.

Существует множество поверхностей, которые являются замкнутыми, как сфера или тор, односторонними, как лист Мёбиуса. Самый простой и наглядный пример такой поверхности известен под названием бутылки Клейна. Ее построил в 1882 году немецкий математик Феликс Клейн. Обычная бутылка имеет наружную и внутреннюю стороны. Если муха захочет переползти с наружной поверхности на внутреннюю или наоборот, ей непременно придется пересечь край, образуемый горлышком. В отличие от обычной бутылки бутылка Клейна не имеет края, а ее поверхность нельзя разделить на внутреннюю и наружную. Та поверхность, которая кажется наружной, непрерывно переходит в ту, которая кажется внутренней, как переходят друг в друга две на первый взгляд различные «стороны» листа Мёбиуса.

К сожалению, в трехмерном пространстве нельзя построить бутылку Клейна, поверхность которой была бы свободна от точек самопересечения. Традиционный способ изображения бутылки Клейна показан на рис. 151. Представим себе, что мы оттянули нижний конец трубки, загнули его вверх и, пропустив сквозь поверхность

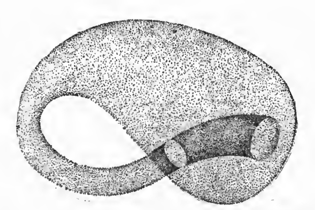


Рис. 151. Бутылка Клейна: замкнутая поверхность, не имеющая наружной и внутренней сторон.

трубки, совместили с верхним концом. У реальной модели, изготовленной, например, из стекла, в том месте, где конец трубки проходит сквозь ее поверхность, придется оставить отверстие. Его не следует принимать во внимание: оно считается как бы затянутым продолжением поверхности бутылки. Иначе говоря, отверстия нет, есть только самопересечение поверхности бутылки. Такое самопересечение неизбежно до тех пор, пока мы имеем дело с трехмерной моделью. Если же мы представим себе, что вся поверхность погружена в четырехмерное пространство, то самопересечение можно будет полностью исключить. Бутылка Клейна — это односторонняя поверхность без края с числом Бетти, равным 2 и хроматическим числом, равным 6.

Известный специалист по алгебраической геометрии Д. Пидо недавно написал книгу под названием «Прекрасное искусство математики». Это великолепная книга, однако профессор Пидо, следуя установившейся традиции, допускает там неверное утверждение. Он пишет, что изготовить бутылку Клейна под силу лишь искусному стеклодуву, сделать же бутылку Клейна «из бумаги совсем невозможно». Действительно, в то время, когда профессор Пидо писал свою книгу, никто даже не пытался склеить бумажную модель бутылки Клейна. Но так продолжалось лишь до тех пор, пока за дело не взялся уже неоднократно упоминавшийся Стифен Барр, писатель-

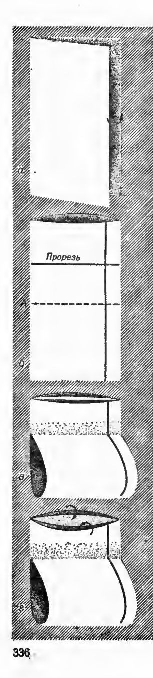


Рис. 152. Как сложить бутылку Клейна из квадратного листа бумаги.

фантаст, а на досуге — большой любитель занимательной математики. Барр довольно быстро придумал множество способов складывания из бумаги моделей бутылки Клейна и даже написал книгу о топологических развлечениях. В книге Барра приводится множество новых способов, позволяющих складывать из обыкновенного листа бумаги изящные топологические модели. Из многих способов изготовления бутылки Клейна, предлагаемых Барром, я приведу лишь один, который позволит нам продолжить манипуляции с квадратом и в то же в время наиболее точно соответствует традиционной модели, выполненной из стекла.

Последовательность действий ясна из рис. 152. Прежде всего перегните квадрат попалам и соедините клейкой лентой его стороны, обозначенные стрелками (рис. 152,*а*). На обращенной к вам половине квадрата сделайте прорезь, перпендикулярную склеенным сторонам. Расстояние между прорезью и верхним краем трубки должно быть равно примерно четверти стороны квадрата (рис. 152,*б*). Эта прорезь соответствует «отверстию» в стенке бутылки Клейна на стеклянной модели. Согнув модель пополам вдоль пунктирной прямой *А*, про-

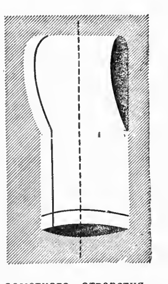


Рис. 153. Если бутылку Клейна разрезать пополам, получается два листа Мёбиуса.

тащите нижний край трубки сквозь прорезь (рис. 152, *в*) и склейте друг с другом верхнее и нижнее основания трубки в соответствии со стрелками на рис. 152, *г*. Нетрудно видеть, что наша плоская модель, сделанная из квадратного листа бумаги, топологически эквивалентна стеклянной бутылке, изображенной на рис. 151, и в сравнении с последней даже обладает одним преимуществом: в стенке бумажной модели нет заметного отверстия. Правда, там, где поверхность самопересекается, в нашей модели (точнее, в модели Барра) есть прорезь, но легко представить себе, что края этой прорези соединены так, чтобы поверхность во всех своих точках была непрерывна и не имела края.

Разрезая бумажную модель разными способами, можно с легкостью демострировать многие удивительные свойства бутылки Клейна. Число Бетти для нее равно 2. Это нетрудно доказать с помощью двух замкнутых разрезов, если их провести вдоль склеенных сторон квадрата. Разрезав бутылку пополам вертикальной плоскостью, вы получите два листа Мёбиуса, переходящих друг в друга при зеркальном отражении. Это свойство бутылки Клейна удобнее всего демонстрировать на высокой «стройной» бутылке (рис. 153), склеенной не из квадрата, а из узкого длинного прямоугольника. Разрезав такую бутылку пополам вдоль пунктирной прямой (на самом деле это не прямая, а одна большая петля вокруг всей поверхности бутылки), вы обнаружите, что каждая половина представляет собой лист Мёбиуса, имеющий в том месте, где ранее была прорезь, самопересечение. Однако, вынув каждый лист из принадлежащей ему половинки прорези, вы можете совсем заклеить ее, ибо она не влияет на топологические свойства листа Мёбиуса

Поскольку бутылку Клейна можно разрезать так, чтобы получились два листа Мёбиуса, должна существовать и обратная операция, о которой говорится в следующем шуточном стихотворении неизвестного автора:

Великий Феликс,
Славный Клейн,
Мудрец из Геттингена,
Считал, что Мёбиуса лист —
Дар свыше несравненный.
Гуляя как-то раз в саду,
Воскликнул Клейн наш пылко:
«Задача проста —
Возьмем два листа
И склеим из них бутылку!»

Как это ни удивительно, но оказывается, что с помощью одного замкнутого разреза бутылку Клейна можно превратить не в два листа Мёбиуса, а всего лишь в один. Огромное достоинство бумажных моделей Барра состоит в том, что они допускают «экспериментальный подход» к решению подобных задач. Попробуйте сообразить, как делается разрез, после которого бутылка Клейна превращается в один лист Мёбиуса.

Бутылка Клейна не единственная достаточно простая односторонняя поверхность без края. Поверхность, которая называется проективной плоскостью (такое название поверхности связано с тем, что топологически она эквивалентна плоскости, изучаемой в проективной геометрии), обладает рядом свойств, присущих бутылке Клейна: это также односторонняя поверхность без края с хроматическим числом, равным 6. Трехмерную модель проективной плоскости, как и модель бутылки Клейна, невозможно сделать без самопересечения. Предложенный Барром простой способ построения такой модели из квадратного листа бумаги изображен на рис. 154. Сначала квадрат нужно прорезать вдоль трех сплошных прямых, обозначенных на рис. 154, *а* буквами B, C, D. Согнув квадрат по диагонали AA', вставьте разрез C в разрез B так, как показано на рис. 154, *б* и *в*. Линию, вдоль которой разрез входит в разрез, следует считать линией самопересечения будущей поверхности. Отогните вверх треугольные клапаны E и F (каждый в свою сторону) и склейте края в соответствии со стрелками на рис. 154, *г*.

Мы получили модель поверхности, которую топологи называют кросс-кэпом (скрещенным колпаком). Это самопересекающийся лист Мёбиуса, край которого можно растянуть и превратить в окружность, причем никаких новых самопересечений при этом не возникнет. Край кросс-кэпа образован краями разреза D, проведенного в самом начале вдоль одной из диагоналей квадрата (рис. 154, a). Заметим, что в отличие от обычного листа Мёбиуса полученная фигура симметрична: на ней нельзя задать ни правой, ни левой ориентации. Если замкнуть край скрещенного колпака, склеив его, как показано на рис. 154, ∂, то получится проективная плоскость. Может показаться, что число Бетти для проективной плоскости, как и для

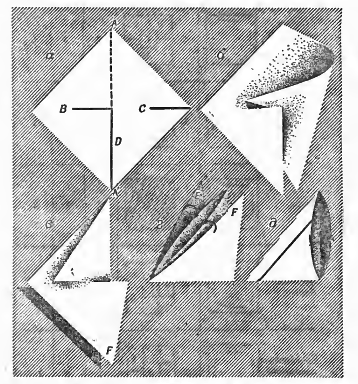


Рис. 154. Как сложить из квадратного листа бумаги кросс-кэп и модель проективной плоскости.

Поверхность	Хроматическое число	Число строк	Число краев	Число Бетти
Квадрат (или круг)	4	2	1	0
Трубка	4	2	2	1
Сфера	4	2	0	0
Лист Мёбиуса	6	1	1	1
Тор	7	2	0	2
Бутылка Клейна	6	1	0	2
Проективная плоскость	6	1	0	1

Рис. 155. Топологические инварианты семи основных поверхностей

бутылки Клейна, равна 2, но это неверно. В данном случае число Бетти равно 1: любой замкнутый разрез либо делит проективную плоскость на две отдельные части, либо превращает ее в поверхность, топологически эквивалентную квадрату, который, как известно, распадается на два куска, какой бы замкнутый разрез мы ни провели. Если в модели проективной плоскости вы вырежете кружок (в каком именно месте — безразлично), она превратится в скрещенный колпак.

Вся сумма приобретенных нами познаний из области топологии содержится в таблице на рис. 155. Слева схематически показано, как нужно склеивать стороны квадрата в каждой из моделей. Стороны, которые надо склеивать друг с другом, обозначены одинаково, причем направления стрелок на них должны после склеивания совпадать. Вершины, обозначенные одинаковыми буквами, должны быть совмещены. Пунктир относится к тем сторонам, которые образуют край склеенной поверхности. Во втором столбце рядом с хроматическим числом данной поверхности приводится одна из тех ее карт, которые можно раскрасить с помощью максимального числа красок. Очень полезно, раскрашивая поверхность, покрывать ее красками с обеих сторон (как если бы вы имели дело не с бумагой, а с тканью, через которую краски проходят насквозь). Это напоминает вам о том, что все поверхности имеют нулевую толщину. Изучив полученную модель, вы убедитесь в том, что каждая область, как и должно быть, граничит со всеми остальными.

ОТВЕТЫ

Чтобы превратить тор в два сцепленных кольца, прежде всего надо провести в квадрате — развертке, или «выкройке», тора — три параллельные прямые (рис. 156). Сделав из квадрата тор, вы увидите, что нужные вам разрезы проходят именно вдоль этих прямых. После разрезания поверхность распадается на два сцепленных друг с другом кольца. Каждое кольцо закручено на полный оборот, и поэтому его поверхность является двусторонней. Каким должен быть замкнутый разрез на бутылке Клейна, чтобы она превратилась в один лист

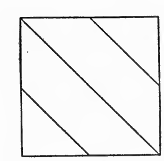


Рис. 156. Решение задачи о превращении тора в два сцепленных перекрученных кольца.

Мёбнуса? Рассмотрев модель нзображенную на рис. 153, вы увидите, что лннии сгиба образуют замкнутую двойную петлю в форме восьмеркн. Еслн бутылку Клейна разделнть вдоль любой нз «половип» восьмеркн, получнтся лист Мёбнуса. Выбор половинки восьмерки будет сказываться лишь в том, в какую сторону «закручены» получающнеся лнсты Мёбнуса.

Возникает вопрос: а что пронзойдет с иашей поверхностью, если разрезать ее вдоль обенх петель одновремеиио (вдоль всей восьмеркн)? Получится двусторонняя лента с двумя краями, перекрученная иа четыре полуоборота. Из-за прорезн на модели поверхность в одном месте окажется надорванной, поэтому вам придется представлять себе, что никакой прорези иет. Эта самопересекающаяся лента является зеркально-снмметричной, и ей нельзя приписать никакой орнентации. Точки самопересечения можно ликвидировать. Для этого надо осторожно вытащить ленту из щели, оставшейся от прорези, а щель заклеить. Край полученной поверхности представляет собой спираль, направление которой завиcнт от того, в какую сторону вынималась из щели лента. Все задачи, описанные в этой главе, основаны на бумажиых моделях Стнфена Барра, которым посвящена его киига о топологнческих развлечениях.

ГЛАВА 28

ПАРАДОКСЫ КОМБИНАТОРИКИ

«В таком огромном человеческом улье, — заметнл как-то Шерлок Холмс по поводу Лоидона, — возможны любые комбииацин событий и фактов, возникает масса незначительных, но загадочных и страниых происшест-

вий...»* Стоит заменить «человеческий улей» на «множество элементов произвольной природы», и высказывание великого сыщика станет неплохим описанием комбинаторной математики.

То, чем занимается комбинаторный анализ, можно назвать распределением элементов (отдельных предметов) по группам в соответствии с некоторыми заранее поставленными условиями. Играя, например, в шахматы, вы решаете комбинаторную задачу о том, как, следуя правилам игры, наилучшим образом разместить некоторое число элементов (шахматных фигур) на доске размером 8×8 клеток, чтобы один выделенный элемент (король противника) не мог избежать мата. Композитор, создавая новую мелодию, также решает комбинаторную задачу: он должен распределить элементы некоторого множества (в данном случае множества нот) так, чтобы мелодия доставляла слушателям эстетическое удовольствие. Комбинаторными задачами в самом широком смысле этого слова наполнена вся наша повседневная жизнь: рассаживая гостей за столом, решая кроссворды, играя в карты, составляя какие-либо расписания, открывая сейф с наборным замком, набирая номер на телефонном диске, мы решаем комбинаторную задачу. Вставляя ключ в отверстие замка, мы с помощью механического устройства (ключа) решаем комбинаторную задачу о нахождении того соотношения длин маленьких стерженьков, при котором цилиндр замка начнет вращаться.

Числовые комбинаторные задачи так же стары, как сами числа. Еще в X веке до нашей эры китайские математики занимались изучением комбинаций и перестановок цифр. Древний китайский магический квадрат Ло Шу представляет собой одну из элементарных задач на составление комбинаций. Требуется в квадрате 3×3 так расставить девять цифр, чтобы суммы трех цифр в любом ряду по горизонтали, вертикали или диагонали были равны между собой. Квадрат Ло Шу (рис. 157) является единственным решением этой задачи, не считая решений, получающихся из него при поворотах и отражениях.

* А. Конан-Дойль, Голубой карбункул, Собр. соч. в 8 т., 1966, том 1, стр. 402.

A	4	9	2
B	3	5	7
C	8	1	6

Рис. 157. Древний китайский магический квадрат Ло Шу.

В XIII веке испанский богослов Рамон Луллий превратил комбинаторику в своего рода культ. Луллий был совершенно убежден в том, что каждая область знания сводится к нескольким основным принципам; изучая все возможные их комбинации, исследователь может открывать новые истины. С целью облегчить себе работу Луллий изготовил прибор, состоящий из концентрических дисков, насаженных на одну общую ось (рис. 158). Вдоль окружности каждого диска он написал буквы, символизирующие основные свойства предмета его исследования. Вращая диски, можно было получать все комбинации этих свойств. Пережитки метода Луллия и поныне можно заметить в некоторых устройствах, способных имитировать те или иные стороны «творческого мышления».

Вплоть до прошлого века комбинаторные задачи, как и магические квадраты, воспринимались либо как нечто мистическое, либо как математическая забава, не имеющая сколько-нибудь серьезного значения. Комбинаторные задачи и поныне служат источником различного рода головоломок, подчас довольно тривиальных. Рассмотрим, например, следующую задачу. В ящике лежат носки: два красных, два зеленых и два синих. Какое наименьшее число носков надо вынуть из ящика (ваши глаза при этом должны быть закрыты), чтобы среди них наверняка оказались два носка одного и того же цвета? Встречаются среди комбинаторных задач и вопросы средней трудности. Например, сколькими разными способами можно разменять доллар, если у вас есть неограниченное число монет достоинством в полдоллара, четверть доллара, десять центов, пять центов и один цент?

Существуют, наконец, комбинаторные задачи настолько сложные, что до сих пор никому не известно, как

Рис. 158. Две вертушки Рамона Луллия.

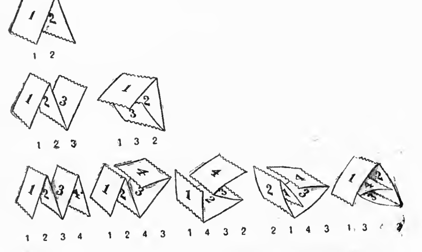


Рис. 159. Как сложить полоску из двух, трех и четырех марок.

их решать. Попробуйте, например, определить, сколькими разными способами можно сложить полоску из n почтовых марок? Предполагается, что ни с той, ни с другой стороны на марках ничего не изображено. Два способа не считаются различными, если полоску, сложенную одним способом, можно так повернуть в пространстве, что она совпадет с полоской, сложенной другим способом. Полоску из двух марок можно сложить всего лишь одним способом, из трех — двумя способами, из четырех марок — пятью способами (рис. 159). Сколько разных способов существует для складывания полоски из пяти марок?

Лишь в начале нашего века комбинаторный анализ был признан самостоятельной математической дисциплиной, и лишь в пятидесятых годах его методы внезапно получили многочисленные приложения и приобрели широкую известность.

Столь неожиданный на первый взгляд всплеск интереса был обусловлен своими достаточно глубокими причинами. В современной математике очень важная роль отводится вопросам ее логического обоснования, а бо́льшая часть формальной логики носит по существу комбинаторный характер. Кроме того, в современной науке большое место занимают методы теории вероятностей, задачи которой в свою очередь требуют предварительных комбинаторных исследований. Куда бы сейчас ни проникала наука, всюду вместо непрерывности обнаруживается дискретность: молекулы, атомы, элементарные частицы, квантовые числа, характеризующие заряд, спин, четность, — все это примеры дискретного строения окружающего мира. Хорошо известный принцип Паули, с помощью которого удалось наконец объяснить структуру периодической системы элементов, был результатом комбинаторного мышления.

Революция, происшедшая в биологии, была вызвана сенсационным открытием: выяснилось, что генетическая информация переносится молекулами нуклеиновой кислоты с помощью кода, состоящего из четырех букв. Каждое сообщение состоит лишь из трех букв, отбираемых теми же способами, которые вот уже более столетия изучаются в занимательной математике. Мириады комбинаторных задач возникают в теории информации с ее битами и «словами», записанными в абстрактных

алфавитах, в теории вычислительных машин, работающих по принципу «да — нет». В то же время именно вычислительные машины позволили решить немало комбинаторных задач, которые до их появления были недоступными из-за слишком большой сложности. Эти успехи также способствовали пробуждению интереса к комбинаторной математике.

Двумя основными типами задач комбинаторики являются задачи на «существование» и на «перечисление». Решение задачи на существование состоит просто в том, чтобы ответить, существует ли некоторое заданное множество элементов или нет. Ответом может служить либо построение подтверждающего или противоречащего примера, либо доказательство возможности или невозможности существования интересующего нас множества. Если это множество существует, то возникают различного рода задачи на перечисление. Сколько существует разных множеств данного типа? Как их лучше всего классифицировать? Какие из них подчиняются разным условиям типа максимума и минимума? И так далее.

Проиллюстрируем оба типа задач на следующем простом примере. Можно ли целые положительные числа от 1 до n так расставить в n ячейках, расположенных на сторонах шестиугольника, чтобы суммы всех цифр в каждом ряду были бы равны между собой? Короче говоря, существует ли магический шестиугольник?

На рис. 160 показан самый простой способ расположения чисел для этой задачи. Можно ли в изображенных на рисунке семи ячейках так разместить цифры от 1 до 7, чтобы сумма цифр в каждом из девяти рядов (трех горизонтальных и шести диагональных) была одной и той же? Эту сумму называют магической постоянной, и определить ее очень легко. Надо сложить все цифры от 1 до 7, а затем разделить результат на 3 — число рядов, параллельных любому из допустимых направлений. Сумма цифр от 1 до 7 равна 28 и на 3 без остатка не делится. Поскольку магическая постоянная должна быть целым числом, мы доказали, что магического шестиугольника «второго порядка» (порядок равен числу ячеек, прилегающих к стороне шестиугольника) не существует.

Доказательство можно провести даже еще проще. Рассмотрим угловую ячейку A. Она принадлежит двум

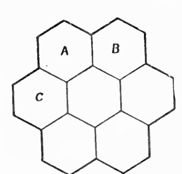


Рис. 160. Почему не существует магического шестиугольника второго порядка?

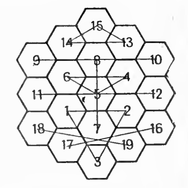


Рис. 161. Единственный магический шестиугольник.

строкам: *AB* и *CA*. Если бы суммы цифр в этих строках были равны, то в ячейках *B* и *C* должны были бы стоять одинаковые цифры, что противоречит условию задачи.

Перейдем к следующему примеру — шестиугольнику третьего порядка, состоящему из 19 ячеек. Сложив числа от 1 до 19, мы получим в сумме 190, то есть число, делящееся без остатка на 5 (число рядов, параллельных любому допустимому направлению). Следовательно, магическая постоянная равна 38. Предыдущее доказательство здесь неприменимо, но это, конечно, еще не позволяет утверждать, что магический шестиугольник третьего порядка существует.

В 1910 году Клиффорд У. Адамс принялся за поиски магического шестиугольника третьего порядка. Он взял набор из шестиугольных керамических плиток, написал на них числа от 1 до 19 и начал составлять из них различные шестиугольники. Он отдавал этому занятию весь свой досуг в течение сорока семи лет, пока наконец в 1957 году, поправляясь после перенесенной операции, не нашел решения (рис. 161). Адамс перерисовал его на лист бумаги, но бумага куда-то затерялась, и в течение последующих пяти лет он тщетно пытался воспроизвести решение еще раз. В декабре 1962 года Адамс отыскал потерянную бумажку и в начале 1963 года прислал свое решение мне. Сумма чисел в каждом из пятнадцати рядов (пяти по вертикали и десяти диагональных) равна 38. Чтобы выявить двусто-

роннюю симметрию фигуры, в группах, состоящих из двух и из трех ячеек, последовательные числа соединены линиями.

Решение Адамса не произвело на меня большого впечатления. В то время я считал, что магическим шестиугольникам наверняка посвящена обширная литература, а Адамс просто нашел одно из сотен возможных решений задачи о шестиугольнике третьего порядка. Но, к немалому своему удивлению, я не обнаружил в литературе даже упоминания о магических шестиугольниках. Я знал, что существует 880 различных магических квадратов четвертого порядка и что полный список магических квадратов пятого порядка не составлен потому, что их насчитывается несколько миллионов. Как ни странно, но никаких ссылок на существование магических шестиугольников в литературе обнаружить не удалось.

Я послал решение Адамса математику Чарлзу Триггу, признанному специалисту по комбинаторным задачам такого типа. Полученная от него открытка подтвердила, что решение Адамса было до сих пор не известно. А еще через месяц Тригг поразил меня, прислав строгое доказательство того, что не существует более ни одного магического шестиугольника любого размера. Среди бесконечного числа способов размещения целых чисел от 1 до n в ячейках шестиугольной фигуры *лишь один способ* приводит к магическому шестиугольнику — способ Адамса!

Доказывая невозможность существования магических шестиугольников выше третьего порядка, Тригг воспользовался известными в теории чисел методами решения диофантовых уравнений. Сначала он вывел формулу, связывающую магическую константу k с порядком шестиугольника n:

$$k = \frac{9(n^4 - 2n^3 + 2n^2 - n) + 2}{2(2n - 1)}.$$

Затем довольно сложным путем показал, что это выражение принимает целые значения лишь при $n = 1$ или $n = 3$. Магический шестиугольник из одной клетки тривиален. Один шестиугольник третьего порядка нашел Адамс. Возник вопрос, существуют ли другие комбинации девятнадцати целых чисел (не считая тех, которые получаются из решения Адамса с помощью поворотов и отражений), которые тоже образуют магический

шестиугольник. Тригг показал, что ответ на этот вопрос отрицателен. Он решал задачу «в лоб» (исчертив груду бумаги разными схемами расположения чисел по шесть схем на каждом листе), комбинируя «грубую силу» с тонкими соображениями, позволяющими значительно сокращать число возможных вариантов. Некоторым читателям удалось проверить удивительный результат Адамса с помощью электронно-вычислительных машин. Один читатель сообщил мне, что шестиугольник Адамса был независимо открыт Томом Викерсом, который не знал, что этот шестиугольник единственный, и опубликовал его без всяких комментариев *.

Я могу вам предложить в качестве простого упражнения попробовать так переставить девятнадцать чисел в решении Адамса, чтобы получился шестиугольник, тоже магический, но в несколько ином смысле: сумма чисел в каждом ряду, состоящем из трех ячеек, равнялась бы 22, сумма четырехклеточного ряда была бы равна 42 и, наконец, сумма пятиклеточного ряда составляла бы 62. Такие магические шестиугольники уже исследовались, и их известно очень много. (Изложенная задача легко решается, если найти к ней правильный подход. Могу дать один наводящий совет: чтобы получить нужное расположение чисел, надо ко всем числам шестиугольника Адамса применить одно и то же простое преобразование.)

Всякий раз, когда целые числа располагаются по какой-нибудь красивой единственно возможной схеме, у этой схемы оказывается масса самых неожиданных свойств. Даже древний квадрат Ло Шу таит в себе неожиданности. В пятидесятых годах нашего века Лео Мозер обнаружил удивительный парадокс, который возникает, если рассматривать квадрат Ло Шу как таблицу относительного мастерства (шахматисты говорят «силы») девяти шахматистов (рис. 157). Пусть ряд A представляет команду из трех игроков, сила которых оценивается в 4, 9 и 2 балла. Ряды B и C относятся к игрокам двух других команд, сила которых оценивается баллами, стоящими в соответствующих клетках. Если между командами A и B происходит круговой турнир, в котором каждый член одной из команд играет с каждым

* *The Mathematical Gazette*, December 1958, p. 291.

членом второй команды, то победа будет пять раз принадлежать команде B и четыре раза — команде A. Очевидно, что команда B сильнее команды A. Если соревнуются команды B и C, то C выигрывает пять раз, а в четырех играх терпит поражение, то есть команда C явно сильнее команды B. Что произойдет, если самая сильная из трех команд — команда C — начнет турнир с самой слабой командой A? Решите эту задачу сами. Скажу лишь, что команда A выигрывает со счетом 5 : 4! Естественно возникает вопрос, какая же из команд в действительности самая сильная. Этот парадокс выявляет все недостатки круговой игры, если цель турнира состоит в том, чтобы выяснить соотношение сил команд-участниц. Из многих парадоксов, которыми занимался Мозер, изложенный парадокс является одним из самых простых. Парадокс остается в силе и в том случае, если каждой команде поставить в соответствие не строку, а столбец квадрата Ло Шу.

Способы расположения элементов в ячейках квадрата или прямоугольника очень тесно связаны с современными комбинаторными задачами, многие из которых нашли широкое применение в планировании экспериментов. В так называемых латинских квадратах элементы расположены так, что в каждом столбце и в каждой строке каждый элемент встречается всего лишь один раз. В связи с этим я могу предложить одну красивую комбинаторную задачу, которая, не будучи сложной, содержит в себе некую забавную неожиданность, нередко ускользающую от внимания.

Предположим, что у вас есть бесконечно много марок достоинством в один, два, три, четыре и пять центов (имеется в виду, что у вас есть бесконечно много марок каждого достоинства). Вы хотите так расположить в виде квадрата 4×4 шестнадцать марок, чтобы ни в одном ряду, ни в одной строчке и ни на одной диагонали (в том числе и на двух главных диагоналях) не было двух марок одного достоинства. Иными словами, если вы поставите на любую марку шахматного ферзя, то никакой его ход не соединит двух марок одного и того же достоинства. Задача предполагает еще одно, дополнительное условие: полная стоимость всех шестнадцати марок должна быть максимально возможной. Какова эта стоимость?

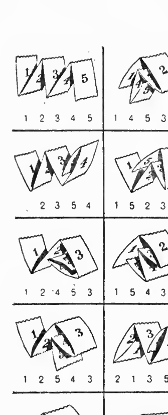


Рис. 162. Ответ к задаче о складывании полоски из пяти марок.

ОТВЕТЫ

Задача о разноцветных носках: из четырех вынутых носков два наверняка будут одного цвета.

Задача о том, как разменять один доллар. Существуют 292 различных способа размена одного доллара. Полное решение этой задачи приводится в книге Д. Пойа «Как решать задачу» *.

Задача о пяти марках: полоску, состоящую из пяти одинаковых с обеих сторон марок можно сложить четырнадцатью разными способами (рис. 162). (Может показаться, что если марки с одной стороны раскрашены, то число способов должно удвоиться, на самом же деле оно увеличивается всего лишь до двадцати пяти. Почему?) Для полоски из семи, восьми и девяти марок число разных способов складыва-

* Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1959.

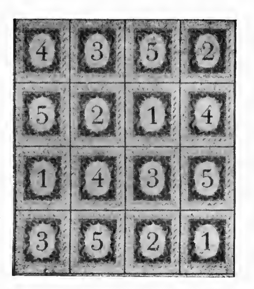


Рис. 163. Ответ к задаче о 16 марках.

ния равно соответственно 38, 120, 353 и 1148. Общая формула для полоски из n марок пока не известна.

Читателям предлагалась еще одна задача, в которой нужно было переделать магический шестиугольник Адамса так, чтобы сумма чисел в любом трехклеточном ряду была равна 22, в четырехклеточном ряду — 42 и в пятиклеточном ряду — 62. Для этого надо написать в каждой ячейке разность между числом 20 и числом, стоящим в этой ячейке.

В задаче о размещении в квадрате 4 × 4 шестнадцати марок (рис. 163) достоинством по одному, два, три, четыре и пять центов искомый максимум равен пятидесяти центам. Это, по-видимому, на два цента превышает ответы большинства читателей. Секрет в том, что среди использованных марок четырехцентовых должно быть только три. «Не исключено, что, увидев решение, читатель признает себя побежденным», — писал Генри Дьюдени, впервые публикуя эту головоломку.

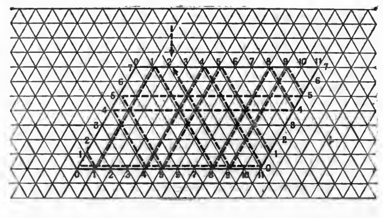
ГЛАВА 29

ЗАДАЧУ РЕШАЕТ... БИЛЬЯРДНЫЙ ШАР

Во все времена и у всех народов мяч был обязательной принадлежностью множества игр как на свежем воздухе, так и в закрытом помещении. Разнообразие игр с мячом поистине неисчерпаемо: тут и детская игра с резиновым мячиком, отскакивающим от асфальта, и такие серьезные виды спорта, как теннис, ручной мяч и бильярд, где мастерство игрока во многом зависит от его умения рассчитать угол падения и отражения мяча.

Известно, что математики и физики получают огромное удовольствие от игры в бильярд. Причину этого понять несложно: ведь траекторию шара, отскакивающего от бортов бильярдного стола, можно рассчитать совершенно строго. Льюис Кэррол, преподававший математику в Оксфорде, также любил играть в бильярд, причем больше всего ему нравилось играть на круглом столе, изготовленном по его заказу. Коллекционеры очень высоко ценят изданные Кэрролом в 1890 году и с тех пор ни разу не переиздававшиеся правила этой игры, напечатанные в виде тоненькой (объемом всего в две странички) брошюры.

В условиях сотен занимательных задач фигурирует упругий шар, находящийся внутри самых разнообразных фигур и многократно отражающийся от их границ. Рассмотрим, например, одну очень старую головоломку. Имеются два сосуда емкостью 7 и 11 литров и большая бочка, наполненная водой. Как с помощью этих двух сосудов отмерить ровно 2 л воды? (Всякие уловки запрещены, то есть на сосудах нельзя делать никаких отметок, их нельзя наклонять, чтобы отмерять доли литра, и т. д.)



11-литровый сосуд	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2
7-литровый сосуд	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7

Рис. 164. Как отмерить 2 литра жидкости за 18 переливаний, имея 7- и 11-литровый сосуды.

Предложенная задача решается либо алгебраическим методом, либо методом проб и ошибок. При чем же здесь отражающиеся шары? Как ни странно, но головоломки на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая траекторию шара, отражающегося от бортов *ромбоидального* стола! (В этом методе, впервые изложенном М. К. К. Твиди *, используется то, что топологи называют «направленным графом».) Границы таких столов удобнее всего рисовать на бумаге, на которую нанесена сетка из равносторонних треугольников. В рассматриваемой задаче стороны стола должны иметь в длину 7 и 11 единиц (рис. 164). По горизонтали отложено количество воды в 11-литровом сосуде в любой момент времени, а по вертикали — та же величина для 7-литрового сосуда.

Как же пользоваться диаграммой? Представьте себе, что шар находится в левой нижней вершине в точке 0. Он будет перемещаться вдоль нижнего основания

* *The Mathematical Gazette*, July 1939.

ромбоида до тех пор, пока не достигнет правой боковой стороны в точке *11*. Это означает, что 11-литровый сосуд наполнен до краев, а 7-литровый пуст. Отразившись от правого борта, шар покатится вверх и влево и ударится о верхний борт в точке с координатами *4* по горизонтали и *7* по вертикали. Это означает, что в 11-литровом сосуде осталось всего 4 литра воды, а 7 литров из него перелили в меньший сосуд.

Прослеживая дальнейший путь шара и записывая все этапы его движения до тех пор, пока он не попадет в точку *2* верхнего борта, вы получите ответ и узнаете, в какой последовательности необходимо производить переливания, чтобы отмерить 2 литра воды. Все 18 переливаний схематически изображены под диаграммой на рис. 164. Наклонные стрелки говорят о том, что вода переливается из одного сосуда в другой, вертикальные означают, что либо вода целиком выливается из меньшего сосуда обратно в бочку, либо больший сосуд надо наполнить водой до краев.

Является ли это решение самым коротким? Нет, существует второй путь, когда воду сначала наливают в 7-литровый сосуд. На диаграмме это соответствует тому, что шар из точки 0 катится вверх вдоль левого борта до тех пор, пока не ударится о верхний борт. Нарисовав траекторию шара, читатель убедится в том, что точка *2* достигается на этот раз после 13 (на четырнадцатом) отражений от бортов. Полученное решение (с 14 переливаниями) является самым коротким.

Требуется совсем немного сообразительности, чтобы применить метод отражающегося шара к любой задаче о разливании жидкости с помощью не более чем трех сосудов. Рассмотрим самую старую головоломку с тремя сосудами, восходящую еще к Никола Фонтана, итальянскому математику XVI века, называвшему себя Тартальей (что значит заика) *. Восьмилитровый сосуд до краев наполнен водой. С помощью двух пустых сосудов объемом 3 и 5 л воду надо поровну разлить в два больших сосуда. Диаграмма для этой задачи изобра-

* Здесь Гарднер допускает некоторую неточность. Истинная фамилия Тартальи не известна. Он родился в 1500 году в итальянском городе Брекчия. В 1512 году во время взятия города французами Тарталья был ранен в нижнюю часть лица, что отразилось на его речи; товарищи прозвали его заикой. — *Прим. перев.*

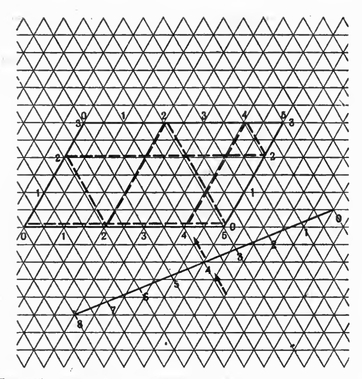


Рис. 165. **Графическое решение задачи Тартальи.**

жеиа на рис. 165. Лнния, параллельная главиой диагонали ромбоида, отиосится к 8-лнтровому сосуду.

Как и в предыдущей задаче, шар начинает свое двнжение из точкн 0. Нарнсовать его траекторню совсем не сложно. С ее помощью вы получите решение с мннимальным числом переливаний, равным семи.

Еслн объемы двух меньших сосудов не нмеют общего делителя, а объем третьего сосуда больше или равеи сумме объемов двух меньших, то с помощью этих трех сосудов можно отмернть любое целое число литров жидкостн, иачиная с одного литра и кончая объемом среднего сосуда. Имея, например, сосуды емкостью 15, 16 и 31 лнтр, вы сумеете отмернть любое количество воды от 1 до 16 литров. Такая процедура невозможна, если объемы двух меньших сосудов имеют общий

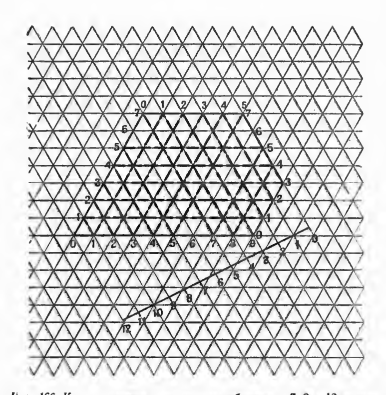


Рис. 166. Как с помощью трех сосудов объемом в 7, 9 и 12 литров отмерить любой объем жидкости от 1 до 12 литров.

делитель. На диаграмме для трех сосудов объемом 4, 6 и 10 литров шар никогда не попадает в точку с нечетной координатой, а с помощью сосудов, объемы которых равны 3, 9 и 12 литров, вы сможете отмерить лишь 3, 6 и 9 литров жидкости. (В обоих случаях объем отлитой жидкости обязательно должен быть кратным общему делителю.) Когда объем большего сосуда меньше суммы объемов двух других, возникают новые ограничения. Если, например, объемы сосудов равны 7, 9 и 12 литрам, то у ромбоидальной диаграммы надо отсечь нижний правый угол (рис. 166). Тогда шар сможет попасть в любую точку от *1* до *9*, за исключением точки *6*. Несмотря на то что числа 7 и 9 не имеют общего дели-

теля, отмерить 6 литров воды оказывается иевозможиым из-за того, что самый большой сосуд имеет слишком маленький объем.

Графический метод применим и тогда, когда объем большего сосуда превышает сумму объемов двух других сосудов. Попробуйте с помощью диаграммы решить одиу головоломку, предложеиную еще Тартальей и иесколько видоизмененную Сэмом Лойдом. Эта задача приведена в его «Энциклопедии головоломок». Ответ к задаче в «Энциклопедии» ие приводился. Это, по видимому, и объясняет, почему со времени выхода в свет книги Лойда головоломка нигде больше не перепечатывалась.

Однажды группа америкаиских солдат раздобыла десятигалонный бочоиок пива. В распоряжении солдат были еще две пустые фляги объемом 3 и 5 галлоиов. «Солдаты, коиечно, приложились к бочонку», — писал Сэм Лойд, а оставшееся пиво принесли в лагерь, разделив его поровну в три сосуда: в бочонок и в обе фляги. Сколько пива выпили солдаты и каким образом им удалось разделить оставшееся пиво иа три равные части? Самое короткое решение является, коиечно, и самым лучшим. При каждом переливании оперировать можно лишь с целым числом галлонов (это относится и к выпитому пиву); кроме того, предполагается, что иикаких потерь пива ие происходит.

Исследование различных возможностей, возникающих при использовании сосудов различных объемов, с помощью метода «бильярдного шара» чрезвычайно увлекательно, и автор иадеется, что оно понравится читателям. Тем, кто заинтересуется этим методом и его обобщениями на случай четырех сосудов, можно порекомеидовать две великолепные статьи О'Бейриа *, в которых задача решается с помощью объемных (тетраэдрических) диаграмм.

Существует и другой тип задач об отражении шара. В них требуется найти траекторию, по которой будет двигаться шар, помещенный внутрь многоугольника и бесконечное число раз отражающийся от его сторон (на протяжении каждого периода шар соударяется с каждой стороной многоугольника только один раз).

* *New Scientist*, 22 and 29 June, 1961,

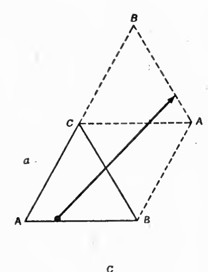
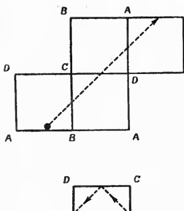
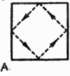


Рис. 167. **Траектория бильярдного шара внутри равностороннего треугольника.**

Для решения таких задач существует мощнейший метод зеркального отражения. Продемонстрируем его на простейшем примере бильярдного стола в форме равностороннего треугольника. Пусть на рис. 167, *а* черная точка обозначает положение шара. Мы хотим, чтобы шар, отразившись от стороны *BC*, ударился о сторону *AC* и вернулся в первоначальное положение. Найти траекторию шара несложно. Отразим треугольник дважды: сначала относительно стороны *BC*, а затем полученный треугольник относительно новой стороны *AC*. Получившиеся треугольники на рис. 167 показаны пунктиром. Прямая линия, соединяющая точку, в которой шар находился вначале, с точкой, в которую она перешла после второго отражения, и будет искомой траекторией. Остается лишь провести отражение пунктирных треугольников в обратном порядке. Для этого можно выполнить чертеж на кальке и соединить между собой все три точки, в которых шар коснулся сторон треугольника. Вырезав полученную фигуру, согните ее так, чтобы получился один треугольник. Каждый сгиб эквивалентен отражению в зеркале. Посмотрев треугольник на свет, вы увидите траекторию, изображенную на рис. 167, *б*. Если наложить еще одно ограничение и потребовать, чтобы все три отрезка траектории были равной длины, то, как нетрудно видеть, задача будет иметь единствен-

Рис. 168. Траектория бильярдного шара внутри квадрата, состоящая из четырех отрезков равной длины.





ное решение: путь шара будет проходить через середины всех сторон треугольника. Интересно отметить, что, следуя по другому пути, шар может вернуться в исходную точку, но его траектория не будет циклической. Если же траектория соединяет середины сторон треугольника, то она циклическая: вернувшись в исходную точку, шар снова повторит весь свой маршрут. Один из читателей заинтересовался, в каких случаях шар, продолжая отражаться от сторон треугольника после завершения первого тура (то есть после выхода из точки x, лежащей на одной из сторон, и возвращения в ту же точку x), будет двигаться по циклической траектории. Он показал, что траектория будет циклической тогда и только тогда, когда точка x отстоит от вершины треугольника на рациональное расстояние (за единицу принимается длина стороны треугольника; вершина треугольника, от которой отмеривается расстояние, лежит на той же стороне, что и точка x). Точно таким же способом находятся траектории шара и в других многоугольниках. На рис. 168 изображен квадрат, отраженный относительно трех разных сторон. Пунктирной линией показана единственная циклическая траектория, состоящая из отрезков равной длины.

Сразу же возникают два интересных вопроса. Существуют ли циклические траектории, образованные равными отрезками, внутри куба, являющегося пространственным аналогом квадрата, и тетраэдра — пространственного аналога равностороннего треугольника? Шар считается идеально упругой невесомой частицей, движущейся прямолинейно. Отскакивая от стенок, шар

подчиняется хорошо известному закону: угол падения равен углу отражения (оба угла лежат в плоскости, перпендикулярной отражающей грани). Вместо шара можно рассматривать луч света, отражающийся от зеркальных стенок внутренней поверхности многогранника. На протяжении одного цикла шар должен удариться о каждую стенку только один раз, а расстояния, проходимые им между двумя последовательными отражениями, должны быть равны. (Попадание шара в вершину или в ребро многогранника не считается соударением со всеми гранями, проходящими через данную вершину или данное ребро. В противном случае решением задачи о траектории шара внутри куба следовало бы считать любую из диагоналей, по которой из конца в конец двигался бы шар.)

Уоррен Уивер в одной из своих многочисленных статей о Льюисе Кэрроле пишет, что среди неопубликованных работ Кэррола по математике обнаружена задача о движении шара внутри куба. Это одна из тех задач, которые не могли не привлечь внимания изобретателя круглого бильярдного стола. Идея об игре в бильярд внутри кубического «стола» далеко не столь надуманна, как это может показаться на первый взгляд. Если учесть, что всего через несколько десятилетий появятся гигантские космические станции, то не нужно быть пророком, чтобы предсказать огромное разнообразие игр и развлечений, в которых будет использоваться трехмерность нашего пространства и невесомость. В «трехмерный» бильярд можно прекрасно играть внутри прямоугольной комнаты, где бортами должны служить все стены, пол и потолок, лузами — все вершины. Из шаров, пронумерованных от 1 до 35, в начале игры придется складывать не треугольник, а тетраэдр. Разумеется, возникнут и свои трудности. Сопротивление воздуха, например, значительно меньше, чем сила трения между шаром и суконной поверхностью бильярдного стола. Если исходный тетраэдр будет разрушен слишком резким ударом, то из-за быстрого возрастания энтропии игроку станет весьма непросто лавировать среди шаров, летающих вокруг него в совершенно произвольных направлениях, словно молекулы газа, находящегося в тепловом равновесии.

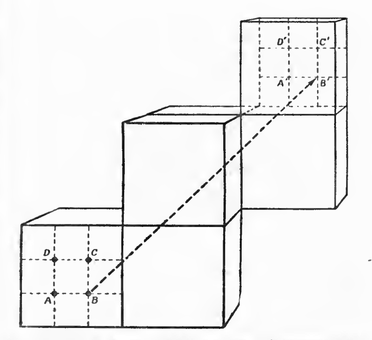


Рис. 159. Решение задачи Льюиса Кэррола о бильярдном шаре, отражающемся изнутри от граней куба.

Но вернемся к задаче Кэррола. К кубу можно применить тот же метод, которым мы пользовались, решая задачу для квадрата. Произведя пять отражений от граней куба, мы получим искомую траекторию, изображенную жирной пунктирной линией на рис. 169 и представляющую собой одну из четырех возможных траекторий совершенно одинаковой формы, каждая из которых является решением задачи. (Если каждую грань куба разделить на девять квадратных клеток, то, соударяясь с гранью, шар всегда будет попадать в одну из вершин центральной клетки.) На рис. 170 изображена картонная модель, в которой натянутая нить наглядно показывает, как проходит траектория, дающая решение задачи Льюиса Кэррола. Все пять отраженных кубов и один первоначальный были последовательно «вложены» друг в друга. Нитка удерживается в нужном положении с помощью петель, просунутых в небольшие

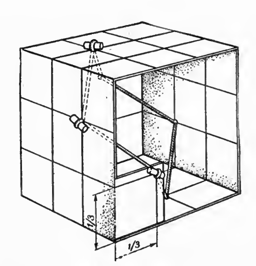


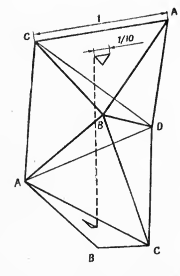
Рис. 170. Модель, изображающая траекторию бильярдного шара внутри куба.

отверстия в гранях куба и закрепленных деревянными палочками. Представив себе куб состоящим из двадцати семи маленьких единичных кубиков, несложно понять, что каждый отрезок траектории представляет собой диагональ одного такого кубика, то есть длина каждого отрезка равна $1/\sqrt{3}$, а длина всей траектории составляет $2\sqrt{3}$.

Насколько мне известно, первым это решение получил Роджер Хэйвард, художник журнала Scientific American *. Он пишет, что найденная им траектория известна химикам-органикам как «шестиугольник в форме кресла». Она часто встречается в углеродных соединениях, например в циклогексане, где шесть углеродных атомов соединены одновалентными связями в кольцо, а атомы водорода располагаются вне этого кольца. «Интересно заметить, — пишет другой читатель, — что траектория упругого шара в кубе, если ее спроецировать на любую грань куба, представляет собой прямоугольник размером 1×2. Изометрические проекции траектории на три плоскости, параллельные трем диагоналям,

* Решение Хэйварда опубликовано в июньском номере журнала *Scientific American* за 1962 год.

Рис. 171. Решение задачи о шаре, отражающемся изнутри от граней тетраэдра.



оказываются ромбами, а четвертой изометрической проекцией является правильный шестиугольник. Как это ни странно, но мяч почему-то прыгает именно так!»

В 1962 году тот же Хэйвард открыл циклическую траекторию в тетраэдре. Отразив тетраэдр относительно трех его граней (рис. 171), мы получим циклическую траекторию, которая по одному разу касается каждой грани. Циклическую траекторию, состоящую из равных отрезков, найти довольно сложно. Одна такая траектория изображена рис. 171 пунктирной линией, а всего их существует три, причем совершенно одинаковой формы. Каждая из них касается граней тетраэдра в одной из вершин маленького равностороннего треугольника, расположенного в центре грани. Стороны этого маленького треугольника составят одну десятую ребра единичного тетраэдра (то есть тетраэдра, у которого длина ребра равна 1), а каждый отрезок траектории имеет длину $\sqrt{10}/10$, что равно 0,31622777... . Отсюда следует, что весь путь шара внутри тетраэдра составляет 1,2649... .

На рис. 172 изображена изящная модель, изготовленная Хэйвардом из прозрачной пленки. Нейлоновая нить представляет собой траекторию шара (или луча света), которая получается после того, как все четыре тетраэдра (рис. 172) «складываются» друг в друга. Хэйвард вырезал из пленки четыре равносторонних треугольника и склеил их вдоль краев, предварительно прорезав в нужных местах небольшие отверстия. Перед тем как приклеивать последний треугольник, он сделал на нитке небольшие петельки протянул их через отверстие в трех

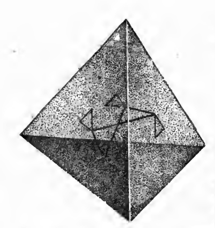


Рис. 172. Прозрачная модель, на которой отчетливо видна циклическая траектория шара внутри тетраэдра.

остальных гранях и временно закрепил снаружи кусочками клейкой ленты. Два свободных конца Хэйвард продел в отверстие последней, четвертой грани, после чего приклеил ее к трем остальным. Натянув нитку так, чтобы она не провисала нигде внутри модели, Хэйвард залил все четыре отверстия клеем *, а после того, как клей высох, аккуратно обрезал все кусочки нитки, торчащие снаружи. Точно так же изготавливается и модель куба. Взяв несколько ниток разного цвета, можно построить все возможные траектории шара в обеих моделях.

ОТВЕТЫ

Имеется десятигаллонный бочонок, наполненный пивом, и две пустые фляги, вмещающие 3 и 5 галлонов. Как с помощью минимального числа операций, предварительно отпив некоторое количество пива из бочонка, разлить оставшееся пиво поровну во все три сосуда? Поскольку с помощью имеющихся сосудов можно отмерять только объемы, выражающиеся целыми числами, объем оставшегося пива должен делиться на три, то есть может быть равен трем, шести или девяти литрам. Первые два числа не подходят, потому что, поделив их на три, мы получим величины, меньшие, чем объем каждого из сосудов. (В результате каждой операции по крайней мере один сосуд должен стать либо пустым, либо наполненным до краев. Это условие не

* Если для изготовления модели берется отмытая фотопленка, то в качестве клея можно использовать кусок той же пленки, растворенной в ацетоне.

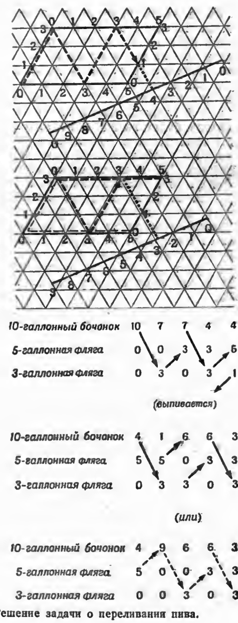


Рис. 173. **Решение задачи о переливании пива.**

выполнялось бы, если бы количество жидкости в каждом сосуде было меньше его объема.) Отсюда следует, что одии галлои пива надо выпить, а остальные девять поровну разлить во фляги и в бочоиок.

Дальиейшее решеиие проведем методом отражающего шара. Кратчайший путь шара упирается в точку 1 (рис. 173, верхияя диаграмма). Это озиачает, что в сосуде объемом в 3 галлоиа иаходится 1 галлон пива. Когда этот галлои будет выпит, в 10-галлониом бочоике останется 4 галлоиа, а в 5-галлоииой фляге — пять. Эта иовая ситуация изображеиа на нижией диаграмме, приведенной иа рис. 173. В самой малеиькой фляге пива иет совсем. Теперь шар должен попасть в точку, отвечающую тому, что каждый сосуд содержит 3 литра пива. Кратчайший его путь изображеи жириой линией, причем две возможиые траектории не совпадают в тех местах, где оии отличны друг от друга. Если выпиваиие галлоиа пива тоже считать одним из переливаиий, то решеиие задачи будет состоять из девяти переливаний, производимых в том порядке, как показаио в иижией части рис. 173.

ГЛАВА 30

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ ДОСКАХ

В течеиие последнего десятилетия заметио возрос иитерес к математическим играм, в которые играют на специальиых досках. Никогда еще столько людей ие играло ии в традициоииые игры типа шахмат, ии в появляющиеся время от времеии иовые игры. Растет число математиков, изучающих стратегию этих игр, и число «умеющих» в них играть ЭВМ. В этой главе мы расскажем о трех великолепиых, ио малоизвестных играх такого типа. Две из них новые, а одна старая. Правила

Рис. 174. Французская военная игра.

всех игр очень просты, доски для них несложно нарисовать на бумаге или на картоне, а сами игры наверняка понравятся всем от мала до велика.

Военная игра (как ее называют во Франции) представляет собой замечательный пример игры один на один, сочетающей в себе необыкновенную простоту правил с чрезвычайно утонченной стратегией. Эдуард Люка в третьем томе своей знаменитой книги «Математические развлечения» пишет, что эта игра была популярна во французских военных кругах в течение всей франко-прусской войны 1870—1871 годов и после нее. К сожалению, с тех пор эту игру совсем забыли: ни в одном солидном руководстве по истории игр на досках она даже не упоминается.

Игровое поле для этой игры изображено на рис. 174. Чтобы упростить объяснение правил, кружки пронумерованы. У одного из игроков (условимся называть его ходы ходами «белых») имеются три фишки, которые он в начале игры ставит на три светлых кружка: *A*, *1* и *3*. Второй игрок («черные») обладает всего одной фишкой, которая перед началом игры занимает кружок *5*. (В качестве фишек годятся шахматные пешки или три пятака и одна двадцатикопеечная монета.) Игроки делают ходы по очереди; начинают белые. Черная фишка может перейти на любую соседнюю ячейку. Белая фишка ходит так же, но ей запрещено двигаться назад, то есть

она может перейти на любую соседнюю ячейку, расположенную слева, справа или спереди от того кружка, на котором она находится. Друг друга фишки не берут. Выигрыш принадлежит белым в том случае, если им удастся запереть черную фишку, то есть загнать ее в кружок, из которого та не сможет сделать ни одного хода. Обычно черная фишка попадает при этом в кружок *B*, но иногда такая же ситуация возникает, если черные занимают кружок *4* или *6*. Во всех остальных случаях выигрывают черные. Для достижения победы им нужно все время держать свою единственную фишку позади фишек противника, не давая ему возможности зайти с тыла. Черные выигрывают и в том случае, когда одни и те же ходы начинают повторяться бесконечное число раз.

Научиться играть в эту игру не сложнее, чем в крестики и нолики, но она гораздо азартнее, а анализ ее более сложен. Люка сумел показать, что белые, играя рационально, могут в каждой партии одерживать победу, однако простой выигрышной стратегии не существует и игра всегда изобилует ловушками и неожиданностями. Самый лучший на первый взгляд ход нередко оказывается самым худшим. Если черные достаточно опытны, то они с легкостью одерживают победу в игре против менее искушенного противника.

Предположим, что черным предоставлена еще большая свобода: разрешим черным в начале игры ставить свою фишку в любой кружок. Кто в этом случае одерживает победу при рациональной игре обеих сторон?

В последнее время появились топологические игры, в которых противники рисуют кривые, извивающиеся по всей доске. Гекс, бридж-ит, игра Гейла * — вот лишь некоторые из игр такого рода, появившихся на прилавках американских магазинов за последние тридцать лет. В 1960 году Уилльям Л. Блэк, будучи студентом Массачусетского технологического института, занялся исследованием гекса и бридж-ит, в результате чего появилась новая топологическая игра, которую друзья изобретателя назвали в его честь «блэк».

* См. главы 8 и 22 книги «Математические головоломки и развлечения».

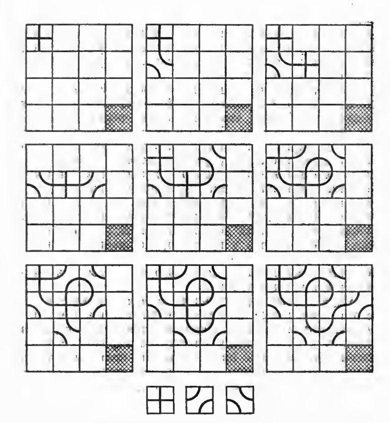


Рис. 175. Топологическая игра блэк.

Для этой игры можно, конечно, изготовить набор отдельных разрисованных квадратиков, однако на бумаге в клетку играть в нее ничуть не хуже. Размеры доски совершенно произвольны; лучше всего, пожалуй, стандартная доска 8 × 8, но для объяснения правил удобнее выбрать игровое поле размером 4 × 4. После того как поле будет готово, один из противников открывает игру, поставив крест в клетке, расположенной в левом верхнем углу, как показано на рис. 175. Второй игрок должен подстроить к этому кресту продолжение, нарисовав в любой соседней клетке одну из трех фигур, показанных в нижней части рис. 175. Каждая из них

образована двумя линиями. Одна линия составляет продолжение уже нарисованной на доске фигуры, вторая соединяет те стороны квадратика, которые не пересекаются с первой линией.

Игроки делают ходы по очереди. Каждым ходом надо продолжить кривую на одну из соседних клеток, стараясь при этом, чтобы кривая не пересеклась с границей игрового поля. Тот, кто будет вынужден пересечь границу, терпит поражение. Игрок одерживает победу в том случае, если ему удастся довести кривую до заштрихованной клетки в правом нижнем углу. На рис. 175 показана типичная схема игры на уменьшенной доске. Загнав противника в правый верхний угол, первый игрок одерживает победу, потому что независимо от выбора продолжения кривая должна пересечься с границей доски. (Заметьте, что у креста продолжением кривой является лишь один из образующих его отрезков, но в результате последующих ходов второй отрезок также может стать частью кривой.)

Игра в блэк представляет особый интерес в связи с тем, что вскоре после ее появления приятель и соученик Блэка Элвин Р. Берлкэмп обнаружил стратегию, гарантирующую победу одному из игроков. Эта стратегия применима к прямоугольным полям любых размеров с произвольным соотношением сторон. Узнав правильную стратегию, вы тотчас потеряете всякий интерес

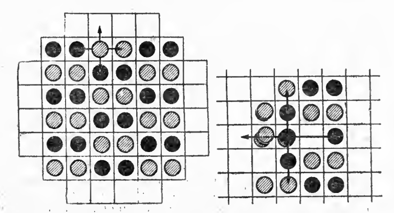


Рис. 176. Игра фокус.

Рис. 177. Ходы в игре фокус.

к игре, поэтому я немного повременю с ее объяснением. Попытайтесь самостоятельно додуматься до блестящего открытия Берлкэмпа.

Инженер Сидней Сэксон — не только большой любитель игр на специальных досках (его собственная коллекция насчитывает около 500 игр, а в картотеке имеются сведения еще о сотнях других игр), но и изобретатель многих необычных игр. Одно из лучших его изобретений — игра в фокус. К ее описанию мы сейчас и перейдем. Для игры в фокус вам понадобится тридцать шесть фишек: восемнадцать — одного цвета и восемнадцать — другого.

Сначала все фишки расставляются на доске 8×8, у которой в каждом углу вырезано по три клетки. Расположение фишек (в данном случае черных и белых) показано на рис. 176.

Начинать игру может любой из противников. Ход заключается в том, что «столбик» фишек (в начале игры каждый столбик состоит всего из одной фишки) передвигается на число клеток, равное числу фишек в этом столбике. Ходить можно либо по вертикали, либо по горизонтали; перемещать фишки по диагонали запрещается. Стрелки на рис. 176 указывают четыре возможных хода, которые может сделать белая фишка, начиная игру. Сделав ход вверх по вертикали, она оказывается на свободной клетке. Ход направо означает, что ее надо положить на другую фишку того же цвета, а ход налево или вертикально вниз приводит к тому, что наша фишка оказывается на фишке другого цвета. В результате трех последних ходов на доске появляются столбики, состоящие из двух фишек. Такой столбик может передвигаться на две клетки в любом из четырех направлений. Столбики, состоящие из трех, четырех или пяти фишек, перемещаются соответственно на три, четыре или пять клеток. Столбик перемещает тот игрок, чья фишка лежит на самом верху. Совершенно несущественно, свободны или заняты клетки, на которых столбик во время хода не останавливается. Расположение фишек на этих клетках нисколько не изменяется. Ход можно закончить либо на пустой клетке, либо поставив столбик поверх другого столбика. На рис. 177 изображены возможные ходы столбика из двух фишек.

Не разрешается строить столбики, состоящие более чем из пяти фишек. Если в результате какого-нибудь хода на доске появляется такой столбик, то из его основания немедленно вынимаются все лишние фишки. Если это фишки противника, то они берутся в плен и убираются с доски. Если фишки принадлежат игроку, сделавшему ход, то они откладываются в сторону и образуют резерв. В любой момент игры владелец резерва может взять из него одну фишку и поставить ее на любое поле доски независимо от того, занято оно или свободно. При этом считается, что резервная фишка сделала самый обычный ход, то есть если она кладется поверх столбика, то владелец фишки становится хозяином столбика. Введение в игру резервной фишки считается ходом: следующий ход принадлежит противнику того игрока, который ее ввел.

Игрок имеет право пойти на меньшее число клеток, чем допускается количеством фишек в столбике. Для этого он должен снять с вершины столбика число фишек, равное числу клеток, на которое он хочет переместиться. Все лишние фишки остаются на своем месте. Можно, например, снять со столбика, состоящего из пяти фишек, три верхние фишки и передвинуть их на три клетки. Оставшийся столбик из двух фишек принадлежит хозяину верхней фишки.

Если один из игроков не может больше сделать ни одного хода (то есть у него не остается ни столбика, ни резерва), то игра кончается его поражением: победу одерживает противник.

ОТВЕТЫ

Кто из участников одержит победу во французской военной игре, если начинают черные и им разрешается поставить свою фишку в любую свободную ячейку? Первым на этот вопрос ответил голландский математик Фредерик Шу в книге «Замечательные задачи» («Wonderlijke Problemen»), изданной в Голландии в 1943 году. Играя рационально, белые всегда могут заманить черных в ловушку. Мы не можем приводить здесь полный анализ игры, но ниже показано, что должны делать бе-

лые в ответ на шесть различных начальных ходов черных.

Черные	Белые
2	A35
4 (или 6)	A15 (или A35)
5	123
7 (или 9)	A15 (или A35)
8	A15
B	123

Топологическая игра блэк, для которой я просил придумать выигрышную стратегию, заканчивается победой первого игрока, если общее число клеток на доске нечетно, и победой второго игрока при четном числе клеток.

Рассмотрим сначала, как происходит игра на доске, состоящей из нечетного числа клеток, например на доске 5×5. Тогда стратегия первого игрока заключается в том, чтобы представить себе, будто вся доска, кроме одной клетки в правом нижнем углу, покрыта костями домино (рис. 178). На самом деле никаких домино, конечно, нет. Второй игрок каждым своим ходом продолжает путь на новую кость домино, а первый игрок должен действовать так, чтобы путь остался на той же кости, на которой он закончился на предыдущем ходе. Тогда второму игроку придется опять перейти на новую кость. Очевидно, что в конце концов он либо будет вынужден пересечь границу, либо окажется на границе клетки, стоящей в правом нижнем углу.

Перейдем к доскам, состоящим из четного числа клеток. В этом случае выигрышная стратегия для второго игрока несколько сложнее. Он должен представить себе, что костями домино покрыта вся доска, кроме верхней левой и нижней правой угловых клеток.

Поскольку эти две клетки одного цвета (мы предполагаем, что наша доска раскрашена так же, как шахматная), все остальные клетки, очевидно, невозможно целиком покрыть костями домино, потому что две клетки одного цвета всегда останутся открытыми. Элвин Р. Берлкэмп, досконально изучивший игру в блэк, называет эти две клетки «расщепленным домино» и для того, чтобы их учесть, предлагает следующий остроумный маневр.

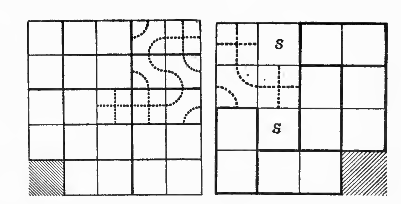
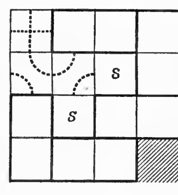


Рис. 178. Оптимальная стратегия при игре в блэк на доске размером 5×5.

Первый ход второго игрока изображен вверху на рис. 179. Тогда первый игрок вынужден пойти на вторую клетку главной диагонали. Три возникающие при этом возможности показаны на рис. 179. Во всех трех случаях линия, не принадлежащая непрерывной кривой, соединяет две клетки одного цвета. Эти две клетки, обозначенные на рисунке 179 буквами S, рассматриваются как «расщепленное домино», а все остальные клетки (за исключением одного квадратика в правом нижнем углу) можно теперь покрыть обычными костями домино. Способ покрытия, как и прежде, совершенно произволен. Используя метод домино, изложенный для доски с нечетным числом клеток, второй игрок одерживает победу.



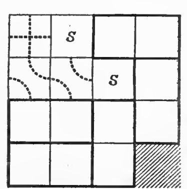


Рис. 179. Оптимальная стратегия при игре в блэк на доске с четным числом клеток.

ГЛАВА 31

ЕЩЕ ВОСЕМЬ ЗАДАЧ

Для решения любой задачи из этой главы вовсе не нужно знать высшую математику.

1. Жесткий квадрат. Рафаэль М. Робинсон, математик из Калифорнийского университета в Беркли, прославился на весь мир решением одной знаменитой задачи из теории множеств — задачи на минимум. В 1924 году Стефан Банах и Альфред Тарский ошеломили своих коллег, показав, что твердый шар можно разрезать на конечное число таких точечных множеств, переставив которые (и не нарушив при этом их форму), получим два твердых шара, каждый точно такого же размера, как и первоначальный. В течение двадцати лет после этого открытия минимальное число множеств, о которых идет речь в «парадоксе Банаха — Тарского», было неизвестно, пока наконец не появилось изящное доказательство, придуманное Робинсоном. Минимальное число множеств оказалось равным пяти. (Если пренебречь всего лишь одной точкой в центре шара, то минимальное число множеств понизится до четырех!)

Читателям предлагается решить одну необычную задачу на минимум, которая не столь серьезна, как предыдущая, и относится скорее к занимательной математике. Задачу эту придумал Робинсон, и минимум для нее пока не найден. Представьте себе бесконечный набор стержней одинаковой длины, которые можно соединять друг с другом только концами. Составив из трех стержней треугольник, мы получим жесткую структуру, а квадрат, составленный из четырех стержней, жестким не будет: его легко преобразовать в другие фигуры, не растягивая, не ломая и не разъединяя стержни. Чтобы квадрат нельзя было деформировать, его надо каким-то образом

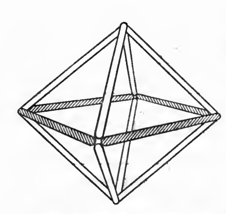


Рис. 180. Как придать жесткость квадрату в трехмерном пространстве.

закрепить. Для этого проще всего приделать к нему еще восемь стержней (рис. 180), в результате чего получится каркас правильного октаэдра.

Предположим теперь, что выводить фигуру из плоскости запрещается. Можно ли и в этом случае сделать квадрат абсолютно жестким с помощью нескольких дополнительных стержней? Разумеется, ни один из стержней не должен выходить из плоскости, а соединять их друг с другом разрешается опять только концами. Стержни нельзя ни класть друг на друга, ни растягивать, ни ломать. Оказывается, что жесткий квадрат на плоскости построить все же можно. Вопрос состоит лишь в том, какое минимальное число стержней для этого потребуется.

2. Необычная игра в монету. Студент-математик Билл и его приятель — выпускник филологического факультета Джон, чтобы решить, кому платить за выпитое пиво, обычно кидают монету. Однажды вечером Билл сказал:

— Поскольку последние три раза выигрывал я, на этот раз даю тебе фору: ты будешь кидать две монеты, а я — одну. Если у тебя выпадет больше гербов, чем у меня, выигрываешь ты. Если меньше, выигрываю я.

— Идет, — согласился Джон.

До тех пор пока бросали только одну монету, вероятность выигрыша Джона каждый раз составляла $^1/_2$. Какова вероятность его выигрыша при новом уговоре?

3. Лабиринт внутри куба. Пространственные лабиринты встречаются нечасто. Их изредка используют психологи для исследования процесса обучения животных,

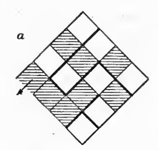
да время от времеин в продаже появляются головоломкн, связаиные с лабнринтамн. В девяиостых годах прошлого века в Лоидоне продавался двухэтажный лабиринт, через который надо было провести стеклянный шарик. Описание этой игрушкн можио иайти в книге «Старые и новые головоломки» * профессора Анджело Гоффмана. Сейчас в Америке продается четырехэтажный лабириит такого же типа, сделанный в виде куба. Он представляет собой прозрачный пластмассовый куб, разделениый прозрачными перегородкамн на 64 малеиькнх кубнка. Вынув некоторые перегородкн, куб можно превратить в лабиринт, сквозь который затем иадо провести шарнк. Это простая головоломка н решается оиа довольио легко.

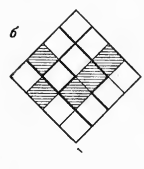
Как-то раз Роберт Эбботт поставил перед собой задачу: сделать как можно более сложный кубический лабнринт размером $4 \times 4 \times 4$. На рис. 181 изображен самый хитроумный из всех придуманиых Эбботтом лабиринтов. Читателю предлагается, не нзготовляя лабиринта, мыслеиио провести через иего шарик. На рис. 181, *а—г* показаны схемы четырех этажей этого лабнрнита. Черными прямыми обозначены вертикальные перегородкн. Заштрихованные клетки означают, что в этом месте есть горнзонтальная перегородка. Если клетка не заштрнховаиа, то горизоитальной перегородки иет. Следовательио, незаштрихованиая квадратная ячейка, ограниченная четырьмя черными прямыми, представляет собой кубнческий объем, открытый снизу, но ограниченный по бокам. Чтобы определить, открыт или закрыт этот объем сверху, достаточио взглянуть на клетку, расположениую над иим этажом выше. Ясио, что весь верхний этаж (рис. 181, *а*) целиком накрыт «потолком».

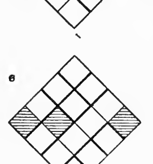
Представьте себе, что каждая схема (*а*, *б*, *в*, *г*) на рнс. 181 является плаиом одного из четырех этажей куба, изображениого на этом же рисунке. Сначала попытайтесь иайти любой путь, по которому можно провестн шарик от нижиего входа до верхиего выхода, а затем попробуйте определить самый короткнй маршрут.

4. Задача о золотой цепочке. Леиокс Р. Лор, директор Музея иаукн и промышлениости в Чикаго, любезио сообщил мне следующий, с виду простой варнаит

* A. Hoffman, Puzzles Old and New, London, 1893.



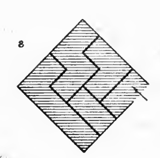


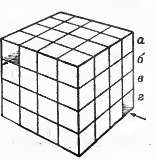


известной комбинаторной задачи, возникающей во многих областях прикладной математики. Один путешественник оказался в незнакомом городе без денег. Через несколько недель ему должны были прислать чек на крупную сумму. Самой дорогой из его вещей была золотая цепочка для часов, состоявшая из двадцати трех звеньев. Путешественник договорился с хозяйкой гостиницы, что будет в качестве залога давать ей каждый день одно звено — и так в течение двадцати трех дней.

Путешественнику, конечно, хотелось как можно меньше портить цепь. Вместо того чтобы каждый день отпиливать по звену, он может в первый день дать хозяйке одно звено, во второй день забрать у нее это звено, поставив взамен короткую цепочку из двух звеньев. На третий день он может опять дать одно звено, на

Рис. 181. Трехмерный лабиринт.





четвертый день обменять все три звена на цепочку из четырех звеньев. Все эти комбинации обязаны удовлетворить одному единственному условию: каждый день у хозяйки гостиницы должно быть столько звеньев, сколько прошло дней со дня приезда путешественника.

Вскоре путешественник понял, что цепь можно распилить многими разными способами, не нарушая договора с хозяйкой. Задача заключается в том, чтобы определить, какое минимальное число звеньев должен распилить путешественник, чтобы, выплачивая по звену в день, заплатить за все двадцать три дня. Более квалифицированным математикам я предлагаю получить общую формулу для вычисления максимальной длины цепи, для которой минимальное число распилов равно n.

5. Когда совпадают стрелки часов? Представьте себе идеально правильные часы с длинной секундной стрелкой *. В полдень все три стрелки указывают точно одну и ту же точку на циферблате. Когда еще все три стрелки будут находиться на одной прямой? Ответ очевиден: в полночь.

Первая и самая простая часть задачи состоит в следующем: доказать, что стрелки могут совпасть лишь в том случае, если все они направлены вверх. Ответ на второй вопрос требует немалой изобретательности: точно определить момент (или моменты) времени между двенадцатью часами дня и двенадцатью часами ночи, когда все три стрелки максимально близки к тому, чтобы оказаться на одной прямой. Под этим подразумевается, что две стрелки указывают одну и ту же точку на циферблате часов, а третья стрелка составляет с первыми двумя наименьший возможный угол. Когда может осуществиться такое расположение стрелок? Где при этом находится третья стрелка?

В задачах такого типа принято считать, что все стрелки движутся с постоянной скоростью, поэтому время может быть определено с любой точностью.

6. Три криптарифма. На рис. 182 приведены три замечательных криптарифма. Верхний самый простой, второй средней трудности, а самый нижний настолько

* Имеется в виду, что все три стрелки (часовая, минутная и секундная) вращаются на одной оси.

Рис. 182. Три криптарифма.

сложен, что вряд ли кто-нибудь из читателей сумеет разгадать его без помощи вычислительной машины.

Задача 1. Каждая точка обозначает одну из десяти цифр от 0 до 9 включительно. Одни цифры могут повторяться несколько раз, а другие вообще остаться неиспользованными. На верхней схеме умножение друг на друга двух двухзначных чисел дает четырехзначное число, к которому затем прибавляется трехзначное число, начинающееся с цифры 1. Замените каждую точку нужной цифрой. Задача имеет единственное решение.

Задача 2. Как и в первом криптарифме, сначала два числа умножаются друг на друга, а затем к результату прибавляется еще одно число. Но на этот раз каждая точка означает одну из цифр от 1 до 9 включительно (нуль отсутствует), причем цифры не повторяются. Задача имеет единственное решение.

Задача 3. Каждая точка в нижнем примере означает цифру от 0 до 9 включительно. Каждая цифра используется дважды. Решение, как и в двух первых задачах, единственно.

7. Задача с шахматными фигурами. Расставив на доске восемь шахматных фигур одного цвета (кроме пешек) в стандартной начальной позиции, вы можете

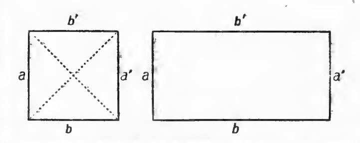


Рис. 183. Как склеить лист Мёбиуса из прямоугольного листа бумаги.

сделать ими 51 ход: по семь различных ходов каждым слоном и каждой ладьей, по три хода королем и конем и, наконец, четырнадцать ходов ферзем. Меняя расположение фигур, число возможных ходов легко увеличить. Какого максимального числа разных ходов можно таким образом добиться? Иными словами: как надо расставить на доске восемь фигур одного цвета, чтобы ими можно было сделать максимальное число отличных друг от друга ходов?

В соответствии с общепринятыми правилами оба слона должны стоять на полях разного цвета; рокировку делать не разрешается. В действительности эти ограничения не нужны, потому что нарушение их приводит лишь к уменьшению числа возможных ходов.

8. Как склеить лист Мёбиуса из прямоугольника? В главе 24 мы уже рассказывали о том, как можно сложить лист Мёбиуса из квадратного листа бумаги по методу Стифена Барра. Квадрат, изображенный на рис. 183 слева, надо согнуть по двум пунктирным линиям, а стороны b и b' склеить. В результате получится односторонняя лента с одним краем, закрученная на пол-оборота. Несмотря на то что изготовленная поверхность не лист Мёбиуса, она тем не менее представляет собой совершенно правильную его модель.

Пусть мы имеем дело не с квадратом, а с вырезанным из бумаги прямоугольником, у которого одна сторона вдвое больше другой (рис. 183, справа). Можно ли сложить его так, что, склеив стороны b и b', мы снова получим лист Мёбиуса? Бумагу разрешается как угодно

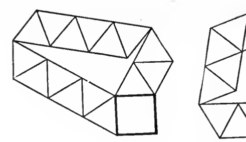
складывать и перекручивать, но не рвать. Ее можно считать сколь угодно тонкой. Чтобы получился лист Мёбиуса, прямоугольник надо перекрутить на пол-оборота и сторону b целиком приклеить к стороне b'. Сложность заключается именно в том, чтобы склеить бóльшие стороны, потому что, склеивая стороны a и a', сделать лист Мёбиуса очень легко.

Если вам удастся найти решение или же доказать, что его не существует, попробуйте ответить на один более интересный вопрос: чему равно минимальное отношение a/b, при котором еще можно склеить лист Мёбиуса, соединяя друг с другом стороны b и b'?

ОТВЕТЫ

1. Один из читателей сумел закрепить квадрат на плоскости с помощью 31 стержня. Два из полученных им решений (оба с 31 стержнем) показаны на рис. 184. Однако оказалось, что решить ту же задачу можно и с помощью существенно меньшего числа стержней. Сорок четыре читателя прислали мне решение, для которого требуется всего лишь двадцать пять стержней (рис. 185), и не успел я оправиться от изумления, как еще семеро читателей потрясли меня другим решением, в котором использовалось только двадцать три стержня (рис. 186). Жесткость плоской конструкции, изображенной на рис. 186, вытекает из того факта, что точки A, B и C должны лежать на одной прямой. Все присланные решения, в которых использовалось меньше двадцати трех стержней, оказались неверными: приведенные в них конструкции либо не были жесткими, либо сами решения содержали какие-нибудь геометрические ошибки. Два типичных примера неправильных решений изображены на рис. 187. Верхняя фигура не является жесткой, а в нижней, обладающей нужной жесткостью, линия a, к сожалению, чуть-чуть короче, чем сторона квадрата.

2. Билл бросает одну монету, а Джон — сразу две. Джон выигрывает, если у него выпадает больше гербов, чем у Билла. Составив таблицу восьми возможных вариантов того, как могут упасть монеты, вы увидите, что в четырех случаях Джон выигрывает, а в четырех проигрывает, поэтому вероятность его выигрыша равна $1/2$,



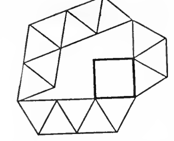


Рис. 184. Плоскне каркасы из 31 стержня для придания жесткости квадрату.

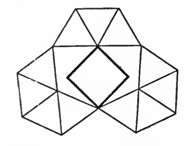


Рис. 185. Плоский каркас из 25 стержней для придания жесткости квадрату.

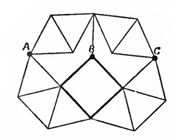
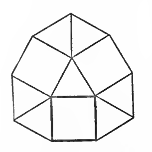


Рис. 186. Плоский каркас из 23 стержней для придания жесткости каркасу.



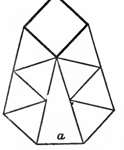


Рис. 187 Два неправильных решения задачи о плоском каркасе.

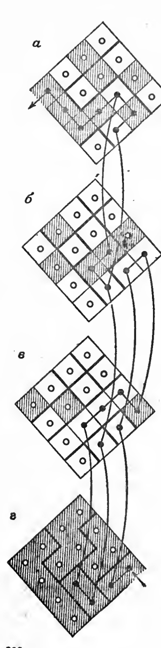


Рис. 188. Решение задачи о трехмерном лабиринте.

то есть такая же, как и при бросании одной монеты. Эта вероятность не меняется до тех пор, пока у Джона на одну монету больше, чем у Билла. Если бы, например, у Джона была пятьдесят одна монета, а у Билла — пятьдесят, то приятели все равно имели бы равные шансы на выигрыш.

3. Самый простой способ решения на бумаге задачи о трехмерном лабиринте состоит в том, что вы ставите точку в каждой клетке, а затем соединяете карандашом все точки, которые оказались в клетках, сообщающихся между собой коридорами. Поскольку для структуры лабиринта существенны только топологические свойства получившейся сети линий, последние могут как угодно извиваться и закручиваться, лишь бы они соединяли точки в правильной последовательности.

Затем надо стереть все тупики, а все замкнутые кривые, которые представляют собой не что иное, как кружные («окольные») пути между двумя точками, превратить в незамкнутые,

стерев из двух образующих кривую дорог самую длинную. В результате у вас получится наикратчайший путь через лабиринт. Заметьте, что замкнутая кривая в верхней части лабиринта образована двумя разными дорогами одинаковой длины (рис. 188). Ясно, что в реальном лабиринте длина каждой кривой, соединяющей любые две точки (в том числе и точки, принадлежащие разным этажам), равна единице, поэтому весь путь через лабиринт составляет 19 единиц.

Существует и второй метод нахождения кратчайшего пути через любой лабиринт. Для этого делается веревочная схема лабиринта. Длина каждого участка в веревочной модели должна быть пропорциональна длине соответствующего участка лабиринта. Все отрезки надо как-то пометить, чтобы знать, к какому участку лабиринта они относятся. Сделав модель, возьмитесь одной рукой за ее «начало», а другой за «конец» и туго натяните веревку. Все кружные пути и тупики провиснут, а натянутая часть веревки и будет кратчайшим путем через лабиринт!

4. Чтобы путешественник мог уплачивать хозяйке гостиницы по одному звену в день, ему достаточно распилить свою золотую цепь, состоящую из двадцати трех звеньев, всего лишь в двух местах. После того как будут распилены четвертое и одиннадцатое звенья, цепь распадется на два отдельных звена и три цепочки, состоящие соответственно из трех, шести и одиннадцати звеньев. Из этого набора можно составить любую комбинацию от 1 до 23 звеньев.

Если на цепи сделано n распилов, то максимальная ее длина выразится формулой

$$[(n+1)\,2^{n+1}]-1.$$

Таким образом, цепь из семи колец достаточно распилить в одном месте (третье звено), цепь из шестидесяти трех звеньев — в трех местах (пятое, четырнадцатое и тридцать первое звено) и т. д.

5. Все три стрелки часов, насаженные на одну ось, находятся на одной прямой лишь в том случае, если все они указывают в точку с отметкой 12. Доказательство быстрее всего проводится с помощью элементарного диофантова анализа. Когда часовая стрелка совпадает

			9	9
×			9	9
		8	9	1
	8	9	1	
	9	8	0	1
+		1	9	9
1	0	0	0	0

			1	7
×				4
			6	8
+			2	5
			9	3

		1	7	9
×		2	2	4
		7	1	6
	3	5	8	
3	5	8		
4	0	0	9	6

Рис. 189. **Решение задачи о трех криптарифмах.**

с минутной или секундной, то разность расстояний, пройденных двумя совпавшими стрелками, должна быть равна целому числу часов. В течение двенадцати часов часовая стрелка описывает полную окружность.

Предположим, что все три стрелки совпали между собой, причем расстояние x, пройденное до этого часовой стрелкой, меньше полной окружности. Если часовая стрелка прошла расстояние x, то минутная стрелка за это время прошла расстояние $12x$, то есть разность их путей составляет $11x$. За тот же промежуток времени секундная стрелка опишет дугу длиной $720x$; вычитая отсюда путь часовой стрелки, получаем $719x$. Все три стрелки могут совпасть лишь при таком значении x, когда оба числа — $719x$ и $11x$ — являются целыми. Поскольку 719 и 11 — простые числа, то x может принимать лишь два значения — 0 и 1, что соответствует двум показателям часов — 0 и 12.

Кроме того случая, когда все три стрелки смотрят вверх, они подходят ближе всего друг к другу (под «ближе всего» понимается, что две стрелки совпадают, а одна находится от них на минимальном расстоянии) в 3 часа 16 мин., $16^{256}/_{719}$ сек. и в 8 час. 43 мин. $43^{463}/_{719}$ сек.

Эти два момента времени являются зеркальным отражением друг друга в том смысле, что если поднести к зеркалу часы, показывающие, скажем, 3 часа 16 мин. $16^{256}/_{719}$ сек., а показание отраженных часов прочесть так, как если бы циферблат был обычным (не отраженным), то получилось бы 8 час. 43 мин. $43^{463}/_{719}$ сек. Сумма этих

двух чисел равна 12 ч. В обоих случаях секундная стрелка совпадает с часовой, а минутная стрелка составляет с ними угол в $^{360}/_{719}{}^{\circ}$ (или $5^{5}/_{719}{}''$). В первом случае минутная стрелка отстает от двух других на $^{30}/_{719}{}^{\circ}$, а во втором — на столько же их опережает.

6. Каждый из трех криптарифмов имеет единственное решение, приведенное на рис. 189. Верхнее решение принадлежит Стифену Барру, среднее — Генри Э. Дьюдени, а самое нижнее заимствовано из книги Фредерика Шу «Занимательные задачи» («Wonderlijke Problemen»).

7. Если восемь шахматных фигур одного цвета расположить на доске так, как показано на рис. 190, то общее число различных ходов будет в точности равно 100. Английский специалист по шахматным задачам Г. Р. Доусон утверждает, что впервые эту задачу поставил в 1848 году немецкий шахматист М. Беццель. Его решение, приведенное на рис. 190, было опубликовано в следующем же году, а в 1899 году Э. Ландау сообщил в одном из немецких математических журналов, что ему удалось доказать единственность решения Беццеля и что 100 действительно является максимально возможным

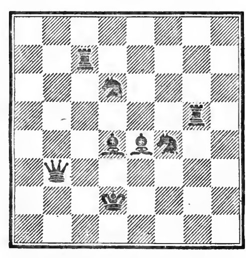


Рис. 190. Как расставить на шахматной доске восемь фигур, чтобы они угрожали максимально возможному числу полей.

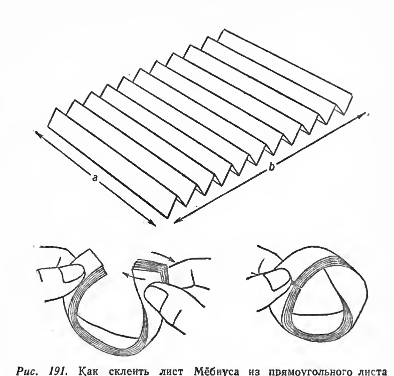


Рис. 191. Как склеить лист Мёбиуса из прямоугольного листа бумаги.

числом ходов. По поводу едннственностн Ландау сделал одно тривиальное замечание о том, что ладья, стоящая в седьмой клетке четвертой строки сверху, может с тем же успехом занимать первый квадрат того же ряда.

8. Перед вамн бумажный прямоугольник, высота которого равна a, а ширина — b. Каково минимальное отношение a/b, при котором из прямоугольника еще можно сложить лист Мёбиуса, склеив друг с другом стороны длиной b? Ответ оказывается совершенно неожиданным: такого миннмума не существует. Дробь может иметь сколь угодно малое значение. Доказательство проводится «конструктивно». Из прямоугольника нужно сделать узкую гофрнрованную полоску (рис. 191), причем так, чтобы одна из сторон a была обращена вверх, а вторая — внна. Затем полоска перекручивается на пол-оборота, а концы склеиваются друг с другом. Все!

ГЛАВА 32

ПРОВЕРКА НА ЧЕТНОСТЬ

В известной поэме Джона Китса «Прекрасная дама, не знающая милосердия» говорится о бледном рыцаре, закрывшем глаза своей прекрасной дамы четырьмя поцелуями.

«Почему именно четыре поцелуя, спросите вы, — писал в одном из писем Джон Китс. — Чтобы не отдавать предпочтение одному глазу перед другим, мне пришлось остановиться на четном числе. Думаю, что двух поцелуев на каждый глаз вполне достаточно. Вообразите на миг, будто я остановился на семи поцелуях. Тогда на каждый глаз пришлось бы по три с половиной поцелуя, и бледный рыцарь оказался бы в весьма затруднительном положении».

Если бы в поэме говорилось, что бледный рыцарь поцеловал глаза своей прекрасной дамы 37 раз, нужно ли было бы тогда экспериментально проверять, одинаковое ли число поцелуев досталось каждому глазу? Нет, потому что 37, будучи нечетным, не делится на 2, и, следовательно, какой-то глаз заведомо получил бы по крайней мере на один поцелуй больше, чем другой. Аналогичная ситуация возникает в одном старом анекдоте, рассказывающем о том, как однажды весной студент, заканчивающий математический факультет, отправился на прогулку со знакомой девушкой. Девушка сорвала ромашку и, приговаривая «любит — не любит...», начала обрывать лепестки. «Напрасно ты так мучаешься, — засмеялся студент. — Нужно только сосчитать все лепестки, и если их число четное, то ты получишь отрицательный ответ, а если нечетное — положительный».

И в отрывке из письма Китса, и в анекдоте речь шла о двух (правда, весьма тривиальных) примерах использования так называемой проверки на четность — приема,

позволяющего, несмотря на всю свою простоту, решать довольно сложные математические задачи. В тех случаях, когда в задаче фигурируют четные и нечетные числа или два взаимно исключающих множества каких-то элементов, которым можно поставить в соответствие четные и нечетные числа, проверка на четность позволяет найти быстрое изящное решение, додуматься до которого без нее было бы чрезвычайно трудно.

В качестве классического примера из теории чисел рассмотрим данное Евклидом и восходящее, по-видимому, еще к пифагорейцам доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ (число иррационально, если его нельзя записать в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются целыми числами). Поскольку длина диагонали единичного квадрата равна $\sqrt{2}$, иррациональность числа $\sqrt{2}$ означает, что, приняв за единицу длины сторону квадрата, мы никогда не сможем точно измерить длину его диагонали с помощью линейки, сколь бы часто ни были расположены ее деления, если расстояние между ними составляет $1/k$, где k — целое число.

Доказательство очень несложно и проводится от противного. *Предположим, что существует* такая дробь n/m с целыми числителем и знаменателем, для которой справедливо равенство $n/m = \sqrt{2}$. Не ограничивая общности, будем считать, что числа n и m взаимно простые (если бы у n и m были общие множители, их можно было бы сократить). Поскольку квадрат этой дроби равен 2, справедливо равенство

$$n^2/m^2 = 2. \qquad (1)$$

Умножив обе его части на m^2, получим

$$n^2 = 2m^2. \qquad (2)$$

Правая часть равенства (2) четна (так как число $2m^2$ содержит множитель 2). Следовательно, левая часть (то есть число n^2) также четна. Квадрат любого числа четен лишь в том случае, если четно само это число. Следовательно, число n четно. Обратимся теперь к числу m. Четно оно или нечетно? Число m не может быть четным, потому что тогда числа m и n были бы четными и дробь $^n/_m$ можно было бы сократить на 2 вопреки нашему пред-

положению о том, что $^n/_m$ — несократимая дробь. Следовательно, число m должно быть нечетным.

Поскольку n четно, мы можем записать его в виде $n = 2a$, где a — какое-то другое целое число. Подставив $n = 2a$ в равенство (2), получим:

$$4a^2 = 2m^2, \tag{3}$$

откуда

$$2a^2 = m^2, \tag{4}$$

С помощью аналогичных рассуждений мы покажем, что m не может быть нечетным числом, так как его квадрат должен быть четным числом, равным левой части уравнения (4). Поскольку каждое целое число является либо четным, либо нечетным, число m не может быть целым. Таким образом, принятое нами предположение оказалось неверным: дроби $^n/_m$ с целым числителем и знаменателем, равной 2, не существует. Число $\sqrt{2}$ иррационально, и из самого его названия видно, как были потрясены древние греки, обнаружив такие числа. Попутно мы доказали, что уравнение (2) неразрешимо в целых числах. Иными словами, не существует такого целого числа, квадрат которого был бы в два раза больше квадрата другого целого числа. Это тоже очень важная теорема, которую очень трудно доказать, не прибегая к проверке на четность — простому приему, обладающему столь удивительной силой.

Какую бы отрасль математики мы ни взяли, в ней всегда найдутся задачи, решаемые легко и просто с помощью проверки на четность. Рассмотрим, например, следующую топологическую задачу. Нарисуем на листе бумаги несколько окружностей произвольных размеров (число окружностей также совершенно произвольно). Всегда ли подобную «карту» можно раскрасить двумя красками так, чтобы никакие две области, имеющие общую границу, не были одного цвета? Оказывается всегда. Один из возможных вариантов доказательства протекает следующим образом. Возьмем любую пару примыкающих друг к другу областей A и B. Окружность, дуга которой отделяет область A от области B, обозначим буквой X. Одна из этих областей будет лежать внутри окружности X, другая — снаружи. Относительно остальных окружностей области A и B расположены одинаковым образом: они лежат либо внутри одного и того же

числа окружностей, либо все окружности расположены вне обеих областей. Следовательно, число окружностей, внутри которых лежит одна из областей, на единицу больше числа окружностей, внутри которых лежит вторая область. Написав на каждой области число окружностей, внутри которых она находится, мы увидели, что из любых двух соседних областей одна будет всегда обозначена четным числом, а вторая — нечетным (рис. 192). Закрасьте четные области одним цветом, а нечетные другим, и задача решена.

Для многих физических явлений нередко находится такая математическая формулировка, в которой используются хорошо всем известные свойства четных и нечетных чисел. В качестве примера рассмотрим один забавный салонный фокус с тремя пустыми стаканами. Поставив стаканы, как показано на рис. 193, объясните зрителям их задачу: переворачивая одновременно по два стакана (по одному каждой рукой), надо в три приема поставить все стаканы донышками вниз. Продемонстрируйте, как это делается: сначала переверните стаканы *1* и *2*, затем *1* и *3* и, наконец, *1* и *2*. После этого все стаканы окажутся в нужном положении. В этом месте следует незаметно сжульничать. Перевернув вверх дном средний стакан, предложите кому-нибудь из зрителей самостоятельно решить головоломку. Обычно мало кто замечает, что новое положение стаканов отличается от прежнего. Простая проверка на четность показывает, что, сколько бы вы ни переворачивали стаканы, справиться с задачей на этот раз вам не удастся.

Доказательство проводится следующим образом. Когда нормально стоит четное число стаканов (ноль или два), мы говорим, что система имеет положительную четность. Если же четное число стаканов стоит вверх дном, то четность такой системы отрицательна. Легко понять, что от переворачивания любой пары стаканов четность всей системы не меняется, поэтому, переворачивая стаканы парами любое число раз, вы никогда не сможете перевести состояние с положительной четностью (один стакан вверх дном) в состояние с отрицательной четностью (когда все стаканы стоят нормально). Если зритель достаточно внимательно следил за вашими действиями, то все, что он сумеет, — это перевернуть все три стакана вверх дном. Если, переходя к очередной

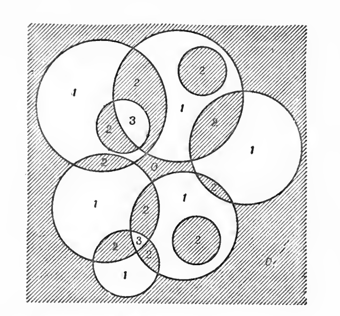


Рис. 192. Проблема двух красок.

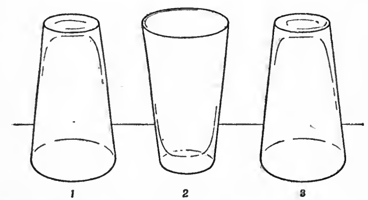


Рис. 193. Как нужно расставить стаканы для фокуса.

попытке, он случайно поставит их правильно, вы должны немедленно вмешаться и, продемонстрировав еще раз, как решается головоломка, поставить стаканы в нужное положение.

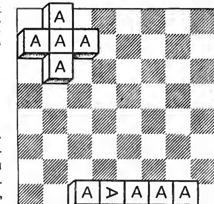
Пусть перед вами стоят десять стаканов (или любое другое четное число, которое не делится на четыре), перевернутые через один вверх дном. Можно ли, переворачивая их попарно, добиться того, чтобы все стаканы стояли одинаково, то есть либо все вниз дном, либо все вверх дном? Нет, нельзя, потому что в обоих случаях придется изменить четность системы (отрицательную для пяти стаканов на положительную для десяти), что невозможно. До тех пор пока мы имеем дело с обычными стаканами, которые ведут себя как полагается — в соответствии с нашими представлениями об их строении, — нарушение закона сохранения четности совершенно немыслимо. Однако природа, особенно на субатомном уровне, вовсе не обязана подчиняться нашим представлениям о ее устройстве.

В 1956 году выяснилось, что закон сохранения четности, который в течение тридцати лет считался незыблемым, нарушается в слабых взаимодействиях элементарных частиц. Физики до сих пор не могут оправиться от неожиданности. Это открытие можно сравнить со случаем, когда кто-то, подойдя к десяти стаканам, перевернутым через один вверх дном, начал их попарно переворачивать и ему удалось поставить все стаканы правильно!

Тот же метод лежит в основе одного занимательного фокуса с монетами, относящегося к области «сверхчувственного восприятия». Вы предлагаете кому-нибудь вынуть из кармана горсть монет и высыпать ее на стол. Отвернувшись, вы просите как угодно перевернуть любые монеты, но переворачивать их непременно парами. Зрители могут делать это сколь угодно долго, стараясь не щелкать монетами по столу, чтобы вам не удалось сосчитать число переворачиваний. Затем одну монету накрывают рукой, после чего вы поворачиваетесь лицом к столу. Бросив беглый взгляд на остальные монеты, вы мгновенно говорите, как лежит спрятанная: гербом или решеткой кверху.

Объяснение фокуса предельно просто. Если в конце число гербов четно, то нечетность положительна, если

Рис. 194. Задача, решаемая проверкой на четность (вверху — расположение кубиков в начале, внизу — в конце задачи).



же нечетно — отрицательна. При переворачивании монет парами четность сохраняется. Рассмотрим, например, ситуацию, когда вначале гербом вверх лежат пять монет. Тогда в конце четность всей системы должна остаться отрицательной, поэтому, увидев четное число гербов, вы сразу догадываетесь, что на спрятанной монете тоже герб. Если же число открытых гербов не четно, то на спрятанной монете должна быть решетка. Фокус можно изменить, попросив накрыть рукой сразу две монеты; угадайте, одинаково они лежат или нет.

Иногда проявление четности бывает настолько замаскированным, что обнаружить его удается лишь самым проницательным математикам. Очень убедительным примером является следующая необычная задача, взятая в несколько видоизмененном виде из великолепного сборника головоломок Роланда Спрэга. На одной грани каждого из пяти одинаковых кубиков написана буква *А*; все остальные грани пустые. Из этих кубиков в левом верхнем углу шахматной доски сложен крест (рис. 194), причем все кубики обращены вверх гранью с буквой *А*. Вы начинаете их по одному переводить на нижний край доски, поворачивая каждый раз вокруг одного из ребер, как будто вы перекатываете с места на место огромный тяжелый куб. Иными словами, перемещение кубика происходит с помощью поворотов на 90°, каждый из которых переводит его на соседнюю клетку. Действуя по этой схеме, вам не удастся уложить кубики в горизонтальный ряд гранями *А* вверх так, чтобы ориентация буквы *А* везде была одинаковой. Реальным является

расположение, изображенное на рис. 194 в нижней части доски. Определите, какой из кубиков горизонтального ряда стоял первоначально в центре креста? Можно, конечно, взять пять кубиков и, «кантуя» их с клетки на клетку, выяснить, куда перешел центральный кубик, однако если вы сумеете догадаться, где здесь скрывается закон сохранения четности, то для решения задачи будет достаточно просто внимательно изучить рис. 194. Более того, проверка на четность является одновременно доказательством единственности, чего нельзя сказать об экспериментальной проверке. Решая задачу экспериментально, вы лишь покажете, что один из кубиков ряда мог быть центральным, но это вовсе не является доказательством того, что центральным не может быть никакой другой кубик.

Возможно, вам покажется более простой другая задача на четность. Ее происхождение связано с работами эксцентричного американского архитектора Фрэнка Ллойда Ронга. Желая досадить одному богатому клиенту, Ронг спроектировал ему дом в виде огромного шкафа для обуви. Дом состоял из трех этажей, разделенных полами и потолками, а каждый этаж был разбит вертикальными стенами на семь прямоугольных комнат. В доме не предусматривалось ни коридоров, ни лестниц, ни санузлов; не было ни фундамента, ни чердака; он целиком состоял из двадцати одной комнаты-коробки.

Двери в этом доме делились на две категории:

1) обычные двери, соединяющие друг с другом соседние комнаты или же ведущие из комнат первого этажа на улицу;

2) люки, через которые с помощью приставленных лестниц можно было попадать из одной комнаты в другую, расположенную на той же вертикали этажом выше или ниже.

Все двери расположены случайным образом. В любой комнате могло быть либо целая дюжина дверей или даже больше, либо вовсе ни одной двери. Ронг, однако, тщательно проследил за тем, чтобы каждая комната имела четное число дверей (нуль считается четным). Требуется доказать, что число внешних дверей, ведущих из комнат первого этажа на улицу, является четным.

В задаче с кубиками надо было определить, какой из кубиков горизонтального ряда первоначально лежал в центре креста, если при перемещении с клетки на клетку кубики каждый раз поворачивались на 90° вокруг соответствующего ребра нижней грани. Очевидно, что кубик, перевернутый четное число раз, окажется на клетке того же цвета, что и первоначальная, с которой началось его перемещение. Если же число переворачиваний нечетно, то конечная клетка будет другого цвета. Менее очевидной является проверка на четность для определения ориентации кубиков.

Представьте себе, что три грани, сходящиеся в одной из вершин кубика, покрыты красной краской, а сам кубик повернут так, что вам видны какие-то три из его граней (рис. 195). Возникает четыре возможности: вы видите три красные грани, две красные грани, одну красную грань и, наконец, вам не видно вообще ни одной красной грани *. Будем говорить, что кубик имеет положительную четность, если из видимых его граней одна или три — красные; в противном случае четность кубика считается отрицательной. Совершенно ясно, что, переворачивая кубик на любую соседнюю грань, мы меняем его четность. (Это следует из того факта, что противоположные грани кубика разного цвета и поэтому, когда вы поворачиваете кубик на 90°, одна из граней уходит из вашего поля зрения, а вместо этого появляется противоположная ей грань другого цвета. Таким образом, любой

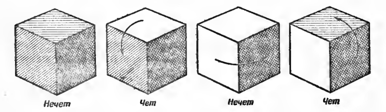


Рис. 195. Изменение четности кубика при повороте на 90° вокруг различных ребер.

* На рис. 195 красные грани показаны штриховкой. — *Прим. перев.*

поворот на 90° означает смену цвета одной из видимых граней.) Представьте себе, что кубик заменен игральной костью, четность которой определяется тем, четна или нечетна сумма очков на трех видимых гранях.

С каждым ходом кубик поворачивается на 90°, поэтому четность его каждый раз меняется. После четного числа ходов кубик оказывается в состоянии с той же четностью и на клетке того же цвета, что и в начале игры. Нечетное число ходов меняет как четность состояния, так и цвет клетки. Центральный кубик сначала занимал белую клетку. Попав в нижний ряд после нечетного числа ходов, он должен был бы оказаться на черной клетке, то есть в состоянии с противоположной четностью. Однако все кубики, стоящие в нижнем ряду на черных клетках, имеют одинаковую четность, поэтому центрального кубика среди них нет. Следовательно, число ходов центрального кубика должно быть четным, и поэтому его надо искать на белой клетке в состоянии с первоначальной четностью. Из двух кубиков, лежащих на белых клетках горизонтального ряда, четность не изменилась лишь у второго кубика справа, следовательно, он и является искомым.

Для доказательства того, что дом, спроектированный Ронгом, имеет четное число дверей, ведущих на улицу, мы сначала напомним, что у каждой двери есть две стороны, следовательно, у n дверей будет $2n$ сторон, то есть четное число. Известно, что число дверей в каждой комнате четно. Пусть все двери закрыты. Тогда внутрь каждой комнаты будет обращено четное число их сторон, поэтому общее число сторон, обращенных во все комнаты, тоже четно. Вычтя это четное число из полного числа сторон всех дверей дома, которое тоже четно, мы получим еще одно четное число, равное числу сторон, не обращенных внутрь комнат. Ясно, что эти стороны должны принадлежать дверям, ведущим на улицу.

Таким образом, мы доказали, что число дверей, ведущих на улицу, четно.

ГЛАВА 33

ИГРА В 15 И ДРУГИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

«Старые обитатели страны головоломок, наверное, помнят, — писал Сэм Лойд в своей широко известной книге „Энциклопедия головоломок", — как в начале семидесятых годов * я свел с ума весь мир маленькой коробочкой, заполненной небольшими кубиками, которая называлась игрой в 15».

Пятнадцать пронумерованных кубиков лежали в квадратной коробке, как показано на рис. 196. Перемещая по очереди по одному кубику, нужно было добиться того, чтобы номера 14 и 15 поменялись местами и чтобы все кубики лежали по порядку, причем после всех перестановок правый нижний угол должен остаться свободным, как в начале игры.

Повальное увлечение этой игрой быстро захватило и Англию, и Европу. «Люди буквально помешались на этой головоломке, — продолжал Лойд. — Из уст в уста передавались удивительные рассказы о лавочнике, забывшем открыть свою лавку, о священнике, простоявшем под уличным фонарем долгую зимнюю ночь в надежде припомнить, как ему удалось решить задачу...

Один известный редактор из Балтиморы рассказывает, что как-то раз ушел в полдень на ленч и лишь поздней ночью был обнаружен вконец отчаявшимися сотрудниками газеты сидящим за столом и гоняющим взад-вперед по тарелке маленькие кусочки пирога!»

После того как несколько математиков опубликовали доказательства неразрешимости этой головоломки, интерес к ней сразу уменьшился. Сейчас на нее лишь иногда ссылаются специалисты как на миниатюрную модель так

* Имеются в виду семидесятые годы прошлого века. — *Прим. перев.*

называемой последовательностной машины. Каждое перемещение кубика считается входным сигналом, а каждое расположение, или «состояние», кубиков рассматривается как выходной сигнал. Оказывается, что число возможных выходных сигналов в точности равно $^1/_2$ (15!), что составляет 1 307 674 368 000. Математическая теория игры в 15 приложима ко всем головоломкам, в которых одинаковые квадратики перемещаются в пределах прямоугольного поля.

Если же перемещаются не квадратики, а разные фигуры, то теория игры в 15 оказывается неприменимой. Успех головоломки Лойда привел к появлению огромного количества аналогичных головоломок, в которых использовались фигуры самой разнообразной формы. Теория всех этих головоломок находится в зачаточном состоянии. Кроме метода проб и ошибок, не существует никакого другого способа определить, можно ли одно заданное состояние перевести в другое заданное состояние, а если можно, то как это сделать с помощью минимального числа ходов. Эти увлекательные головоломки как будто специально созданы для программистов, а для всех остальных они являются увлекательными играми, в которые можно играть в одиночку, без партнера. Никаких специальных приготовлений, как правило, не требуется:

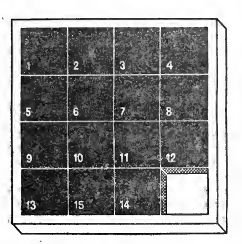


Рис. 196. Игра в 15.

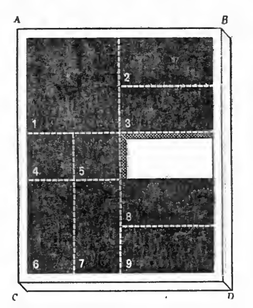


Рис. 197. «Папина головоломка».

при наличии ножниц и куска картона все необходимое изготавливается буквально за несколько минут.

Одна из этих головоломок (возможно, самая ранняя) изображена на рис. 197. Оторвитесь на некоторое время от книги и вырежьте из тонкого картона девять нужных фигур. Для этого нарисуйте прямоугольник размером 4×5, разграфите его тонкими линиями на единичные клетки, а затем просто обведите и пронумеруйте, их так, как показано на рис. 197. Вырежьте фигуры и разложите их внутри прямоугольника размером 4×5, начерченного на листе бумаги или картона другого цвета. Задача состоит в том, чтобы, перемещая по одной фигуре за раз, не перенося их друг над другом и не выводя за пределы большого прямоугольника, перевести квадрат *1* из угла *A* в угол *D*.

Перевести квадрат в угол несложно. Для этого фигуры передвигаются в следующем порядке: *5*, *4*, *1*, *2*, *3*; *4* (вверх и вправо), *1*, *6*, *7*, *8*, *9*; *5*, *4*, *1*, *6*; *7*, *8*, *9*, *4* (влево и вниз), *8*; *7*, *6*, *2*, *3*, *1*. Приведенное решение состоит из минимального числа ходов, равного 25. (Перемещение

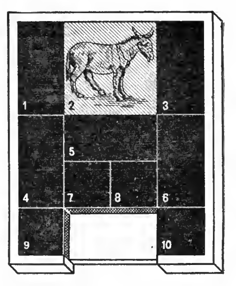


Рис. 198. Головоломка «Рыжий осел».

фигуры вдоль двух сторон прямого угла считается одним ходом.) Чтобы перевести большой квадрат из угла *A* в угол *D*, потребуется 29 ходов. Первые 19 ходов в обоих решениях совпадают, а дальнейшие ходы выглядят так: *1*, *3*, *2*, *6*, *7*; *8*, *9*, *4*, *5*, *1*. По-видимому, невозможно перевести квадрат *1* из угла *A* в угол *C* меньше чем за 59 ходов. Попробуйте сами это сделать, не заглядывая в ответ. Вполне достаточно вырезать фигуры из картона; правда, значительно красивее и долговечнее будут прямоугольники из фанеры, из пластмассы, из линолеума и т. д. Приклейте к листу фанеры четыре картонные полоски, и у вас получатся границы, внутри которых должны перемещаться фигуры. Фанеру необходимо хорошенько обработать шкуркой, чтобы прямоугольнички легко скользили по ней; по краям прямоугольничков неплохо сделать фаску и закруглить углы.

Происхождение этой прекрасной головоломки никому не известно. В 1926 году в Америке она продавалась под названием «Папина головоломка»; как правило, так ее называют и до сих пор. Если один из прямоугольников размером 1×2 разрезать пополам на два единичных

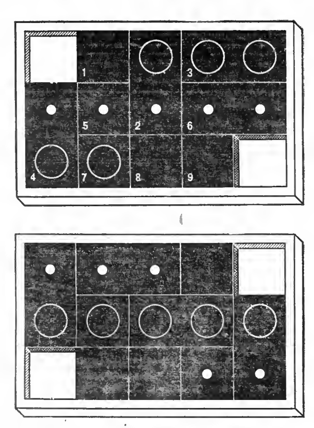


Рис. 199. Головоломка «Пять близнецов в одном ряду». Слева — начальное, справа — конечное положения.

квадрата, то получится более сложная головоломка, состоящая из десяти фигур (рис. 198). Во Франции она долгое время была известна под названием «Рыжий осел». Играющий должен передвигать фигуры до тех пор, пока большой квадрат с нарисованным на нем рыжим ослом наконец можно будет выдвинуть из коробки через отверстие в нижнем бортике. Еще никому не удалось обнаружить решение, которое состояло бы из минимального числа ходов. Попробуйте повторить решение одного из читателей, которому потребовалось сделать лишь 81 ход.

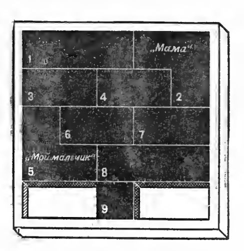


Рис. 200. «Мамина головоломка».

В 1934 году, когда в Дионне родились пять близнецов, в честь этого события была выпущена головоломка «Пять близнецов в одном ряду» (ее изобрел Ричард У. Фатиган), изображенная на рис. 199. Пять кружков обозначают головки пяти близнецов. Задача заключается в том, чтобы позицию, изображенную на рис. 199 сверху, перевести в другую позицию, показанную на том же рисунке снизу. Самое лучшее из всех известных мне решений насчитывает 30 ходов.

Следовало ожидать, что кому-нибудь придет в голову усложнить задачу, воспользовавшись фигурами, отличными от прямоугольников. В 1927 году Чарлз Л. А. Дайемеид получил патент № 1633397 на головоломку, изображенную на рис. 200. Очевидно, в противоположность «Папиной головоломке» головоломку Дайемеида назвали «Маминой головоломкой». Фигура № 2 называлась «Мама», фигура № 5 — «Мой мальчик». (Остальные семь фигур представляли собой различные невзгоды на пути между матерью и сыном.) Цель задачи состоит в том, чтобы, соединив друг с другом фигуры *2* и *5*, построить в правом верхнем углу прямоугольник размером 3×2 (ориентирован он может быть как угодно). Попробуйте придумать решение, состоящее из 32 ходов.

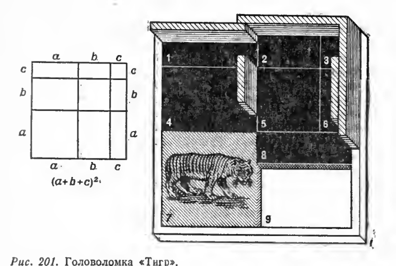


Рис. 201. Головоломка «Тигр».

Последним усовершенствованием этих необычных игр, историей которых пока никто не занимался, является головоломка, изобретенная Шерли Э. Стоттсом.

В возрасте семи лет Стоттс ослеп, зрение его так и не восстановилось. В последние годы он придумал множество удивительных головоломок и сам выполнил их из дерева, проволоки и пластмассы. В начале шестидесятых годов обсуждался вопрос о выдаче Стоттсу патента на серию головоломок типа игры в 15, которые он назвал «Тигр».

Каждая головоломка этой серии основана на диаграмме, часто используемой преподавателями алгебры для наглядного вывода формулы квадрата суммы. Я опишу лишь одну самую простую «тигровую» головоломку, для которой понадобится диаграмма, используемая при выводе формулы суммы квадрата трех слагаемых $(a + в + c)$, изображенная на рис. 201 слева. Величины a, $в$ и c отложены на сторонах квадрата. Умножая выражение $(a + в + c)$ само на себя, мы получаем следующий результат:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Каждое слагаемое в этой сумме равно площади какой-нибудь фигуры на чертеже: здесь есть три квадрата со

сторонами *a*, *в* и *c*; два прямоугольника со сторонами *a* и *в*, два прямоугольника со сторонами *a* и *c* и, наконец, два прямоугольника со сторонами *в* и *c*. Эту схему Стоттс положил в основу чудесной головоломки, изображенной на том же рисунке справа. К верхней стороне большого квадрата он приклеил картинку с изображением тигра. В правом верхнем углу коробочки Стоттс укрепил два кусочка картона, обозначающие часть забора (на рисунке они заштрихованы). Три оставшиеся части он приклеил к прямоугольникам, обозначенным цифрами *1*, *4* и *6* (если вы будете сами мастерить эту головоломку, то забор можно не приклеивать к фигурам, а просто нарисовать на них).

В начале игры все фигуры раскладываются так, как показано на рис. 201, а фигура *9* вынимается из коробки. Перемещая фигуры внутри коробки, надо добиться того, чтобы тигр оказался в правом верхнем углу и чтобы он был со всех сторон окружен глухим квадратным забором.

В этой головоломке в отличие от всех предыдущих в коробочке довольно много пустого места, поэтому квадратную фигуру иногда можно повернуть на 90°. Такой поворот, естественно, разрешается лишь в том случае, если он допустим геометрически, то есть если при этом ни одну из фигур не придется выводить из плоскости. Лучшее решение Стоттса состоит из сорока девяти ходов. Головоломки большего размера обычно гораздо сложнее; я, во всяком случае, не знаю более сложных задач такого типа, чем «тигровые» головоломки Стоттса.

Сейчас не существует никаких практических применений для теории головоломок, в которых внутри прямоугольной коробочки перемещаются разнообразные плоские фигуры. Однако было бы наивно думать, будто эти головоломки так никогда и не пригодятся на практике. С ростом автоматизации возникают сложные задачи, связанные с разработкой наиболее эффективных способов хранения и нахождения нужных товаров па складах. Наступит день, когда любая домашняя хозяйка сможет передать по телефону в универмаг все свои поручения, а машины найдут нужные ей товары и либо пошлют их по почте, либо отправят багажом. Если же эти товары будут упакованы в прямоугольные ящики, то весьма вероятно, что их придется некоторое число раз передвигать

внутри какого-нибудь ограниченного пространства. Такого же рода задачи непрерывно возникают сейчас на автомобильных стоянках и в гаражах больших городов, где в пределах имеющейся площади необходимо расставить как можно больше машин и для каждой из них придумать самый короткий способ выведения со стоянки на улицу. Головоломки с перемещающимися внутри коробки фигурами в Англии нередко называют «гаражными» головоломками, потому что в некоторых английских вариантах этой игры прямоугольники считались машинами, стоящими в гараже. Задача, естественно, состояла в том, чтобы подвести к воротам один определенный автомобиль, не выводя при этом наружу никакой другой машины.

Начав решать любую из этих головоломок, вы сразу убедитесь в том, что они обладают почти гипнотическим воздействием. Не в силах оторваться, вы будете непрерывно передвигать фигуры в коробочке в поисках минимального числа ходов, необходимого для достижения заданного состояния.

Все эти задачи решаются отнюдь не только методом проб и ошибок. Вскоре у вас возникнет понимание того, что одни ходы сразу заводят в тупик, а другие позволяют добиться желаемых результатов.

ОТВЕТЫ

«Папина головоломка» решается в 59 ходов: *5*, *4*, *1*, *2*, *3*, *4* (вверх и вправо); *1*, *6*, *7*, *8*, *9*, *5*; *4*, *1*, *6*, *7*, *8*, *9*; *5* (влево и вверх), *9*, *8*, *5*, *4*, *1*; *3*, *2*, *7*, *6*, *4* (вверх и влево), *6*; *7*, *4*, *5*, *6*, *7*, *5* (вправо и вверх); *3*, *2*, *5*, *4*, *3*, *2*; *4* (вниз и вправо), *2*, *3*, *6*, *7*, *1*; *4*, *5*, *2*, *3*, *6*, *7*; *1*, *4* (влево и вверх), *9*, *8*, *1*.

Для решения головоломки «Рыжий осел» достаточно 81 хода: *9* (до середины, то есть до линии, делящей свободную ячейку пополам), *4*, *5*, *8* (вниз), *6*; *10* (до середины), *8*, *6*, *5*, *7* (вверх и влево); *9*, *6*, *10* (влево и вниз), *5*, *9*; *7*, *4*, *6*, *10*, *8*; *5*, *7* (вниз и влево), *6*, *4*, *1*; *2*, *3*, *9*, *7*, *6*; *3*, *2*, *1*, *4*, *8*; *10* (вправо и вверх), *5*, *3*, *6*, *8*; *2*, *9*, *7* (вверх и влево), *8*, *6*; *3*, *10* (вправо и вниз), *9* (вниз и влево), *1*; *4*, *2*, *9*, *7* (до середины), *8*, *6*, *3*, *10*, *9* (вниз), *2*; *4*, *1*, *8*, *7*, *6*; *3*, *2*, *7*, *8*, *1*; *4*, *7* (влево и вверх), *5*, *9*, *10*; *2*, *8*, *7*, *5*, *10* (вверх и влево), *2*.

Близнецов можно выстроить в одну шеренгу с помощью 30 ходов: *9, 8, 1, 2, 3*; *6, 8* (вверх и влево), *2, 5* (вправо и вниз), *3*; *6, 8* (вверх и влево), *9, 2, 8*; *6, 3, 1* (вправо и вниз), *6, 3*; *5* (вверх и вправо), *1* (вправо и вниз), *7, 1* (влево), *8*; *5* (вниз), *3, 6* (до середины), *4, 9*.

«Мамина головоломка» решается в 32 хода: *9* (влево), *8, 7, 6, 5*; *9* (вверх), *8, 7, 6, 4*; *2, 1, 3* (вверх), *9* (вверх), *5*; *4* (влево и вверх), *6* (влево, вверх, влево), *2, 4, 6*; *5, 9* (вертикально вниз), *6* (влево и вниз), *4, 2*; *5* (вправо), *6* (вправо и вниз), *4* (вниз), *3, 1*; *2, 5*.

Решение головоломки «Тигр», состоящее из 49 ходов, имеет следующий вид: *8, 5, 6, 2, 3*; *1, 4, 2* (влево), *3* (влево), *1*; *4, 2, 3* (вверх), *7, 8* (влево и вверх); *5, 6, 1, 4, 3*; *2, 7, 8* (вверх), *5, 6*; *1, 8* (вправо и вниз), *5, 6, 1*; *8* (вниз), *4, 2* (повернуть на 90° и совместить меньшую сторону со стороной квадрата *3* так, чтобы квадрат *3* оказался над прямоугольником *2*), *7, 5*; *6* (повернуть на 90° и положить горизонтально под квадратом *5* забором вниз), *4, 2* (повернуть на 90° и положить горизонтально под фигурой *7*), *3* (сдвинуть вправо до конца прямоугольника *2*), *7*; *8, 1, 4, 6* (повернуть на 90° и вдвинуть в верхний промежуток между фигурами *5* и *7*; забор должен находиться справа), *4*; *8* (влево и вниз), *2* (вниз и влево), *3* (вниз и влево), *1*.

ГЛАВА 34

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Ни одному другому разделу теории чисел не свойственно столько загадочности и изящества, как разделу, занимающемуся изучением простых чисел — непокорных упрямцев, упорно не желающих делиться ни на какое целое число, кроме единицы и самих себя. Некоторые задачи, относящиеся к теории распределения простых чисел, формулируются настолько просто, что понять их может

и ребенок. Тем не менее они настолько глубоки и далеки от своего решения, что многие математики считают их вообще неразрешимыми. Может быть, в теории чисел, так же как и в квантовой механике, действует свое собственное соотношение неопределенности и в некоторых ее разделах имеет смысл гворить лишь о вероятности того или иного результата?

Основная трудность обусловлена тем, что простые числа распределены среди всех целых чисел по закону, носящему заведомо невероятностный характер, но тем не менее упорно не поддающемуся всем попыткам установить его. Чему равно сотое простое число? Единственный способ ответить на этот вопрос для математика состоит в том, чтобы составить список простых чисел и посмотреть, какое из них стоит на сотом месте. Как же составить такой список? Простейший метод состоит в том, чтобы перебирать одно за другим все целые числа подряд, вычеркивая при этом все составные (непростые). Разумеется, с помощью современных ЭВМ подобный перебор можно производить необычайно быстро, однако по существу такое решение ничем не отличается от процедуры, предложенной около 2000 лет назад астрономом и географом из Александрии Эратосфеном.

Познакомиться с простыми числами поближе проще всего, пропустив все числа, меньше 100, через решето Эратосфена (так называется предложенный древним ученым метод отыскания простых чисел). Один из наших читателей предложил следующую «конструкцию» решета Эратосфена. Выпишем все целые числа от 1 до 100 в виде прямоугольной таблицы, изображенной на рис. 202. Вычеркием все числа, кратные 2, за исключением самой двойки, проведя вертикальные черты во втором, четвертом и шестом столбцах. Вычеркнем все числа, кратные 3 (сама тройка остается), проведя вертикальную черту в третьем столбце. Следующее за 3 невычеркнутое число равно 5. Чтобы вычеркнуть числа, кратные 5, проведем диагонали, идущие вниз и влево. Оставшиеся в таблице числа, кратные 7, вычеркнем, проведя диагонали с наклоном вправо и вниз. Числа 8, 9 и 10 — составные, их кратные уже были вычеркнуты раньше. Наша работа по составлению списка простых чисел, не превосходящих числа 100, на этом заканчивается, поскольку следующее простое число 11 больше 10—числа, равного квадратному

1	**2**	**3**	4	**5**	6
7	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	**41**	42
43	44	45	46	**47**	48
49	50	51	52	**53**	54
55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	**71**	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	**83**	84
85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

Рис. 202. Решето Эратосфена.

корню из самого большого числа в таблице. Если бы таблица была больше, то иам пришлось бы исключать кратиые 11, проводя диагоиали с более крутым иаклоиом.

Итак, все числа, кроме 26, выделенных более жириым шрифтом, просеялись сквозь решето. Осталось лишь 26 простых чисел. Математики предпочитают говорить, что осталось лишь 25 первых простых чисел, поскольку многие важиые теоремы формируются проще, если 1 не считать простым числом. Например, «осиовная теорема теории чисел» утверждает, что любое целое число допускает одиозиачиое (с точиостью до порядка миожителей) разложеиие иа простые миожители. Так, число 100 представимо в виде произведеиия четырех простых миожителей $2 \times 2 \times 5 \times 5$. Всякий другой иабор (отличающийся хотя бы одиим числом) простых множителей не даст в произведеиии числа 100. Если же считать едииицу простым числом, то эта весьма важная теорема иеверна: 100 в этом случае представимо в виде произведения бескоиечно миогих различиых иаборов простых чисел, например в виде $2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 1 \times 1$,

Изучая таблицу, изображенную на рис. 202, можно извлечь много сведений о простых числах. Например, сразу же видно, что все простые числа p, удовлетворяющие неравенству $p > 3$, либо на единицу больше, либо на единицу меньше какого-то кратного 6. Ясно также, почему среди простых чисел так много «близнецов» — простых чисел, отличающихся на 2 (например, 71 и 73, 209 267 и 209 269, 1 000 000 009 649 и 1 000 000 009 651): после того как мы исключим все числа, кратные 2 и 3, все остальные числа разбиваются на пары «близнецов». Последующее пропускание чисел через решето Эратосфена приводит лишь к тому, что либо один из близнецов, либо оба отсеиваются, но некоторые пары остаются нетронутыми. По мере возрастания чисел пары простых чисел-близнецов встречаются все реже и реже. Существует (пока еще не доказанная) гипотеза, согласно которой среди простых чисел имеется бесконечно много пар близнецов.

В зависимости от расположения целых чисел простые числа могут образовывать тот или иной узор. Однажды математику Станиславу М. Уламу пришлось присутствовать на одном очень длинном и очень скучном, по его словам, докладе. Чтобы как-то развлечься, он начертил на листке бумаги вертикальные и горизонтальные линии и хотел было заняться составлением шахматных этюдов, но потом передумал и начал нумеровать пересечения, поставив в центре 1 и двигаясь по спирали против часовой стрелки. Без всякой задней мысли он обводил все простые числа кружками. Вскоре, к его удивлению, кружки с поразительным упорством стали выстраиваться вдоль прямых. На рис. 203 показано, как выглядела спираль со ста первыми числами (от 1 до 100). Для удобства числа вписаны в клетки, а не стоят на пересечении линий.

Вблизи центра выстраивания простых чисел вдоль прямых еще можно было ожидать, поскольку плотность простых чисел вначале велика и все они, кроме числа 2, нечетны. Если клетки шахматной доски перенумеровать по спирали, то все нечетные числа попадут на клетки одного и того же цвета. Взяв 17 пешек (соответствующих 17 простым числам, не превосходящим числа 64) и расставив их наугад на клетки одного цвета, вы обнаружите, что пешки выстроились вдоль диагональных прямых. Однако не было оснований ожидать, что и в

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Рис. 203. Спираль Улама.

области больших чисел, где плотность простых чисел значительно меньше, те также будут выстраиваться вдоль прямых. Улама заинтересовало, как же будет выглядеть его спираль, если ее продолжить до нескольких тысяч простых чисел.

В вычислительном отделе Лос-Аламосской лаборатории, где работал Улам, имелась магнитная лента, на которой было записано 90 млн. простых чисел. Улам вместе с Майроном Л. Стейном и Марком Б. Уэллсом составили программу для вычислительной машины MANIAC, позволившую нанести на спираль последовательные целые числа от 1 до 65 000. Получившийся при этом узор (иногда его называют «скатертью Улама») изображен на рис. 204. Обратите внимание на то, что даже у края картины простые числа продолжают послушно укладываться на прямые.

Прежде всего бросаются в глаза скопления простых чисел на диагоналях, но вполне ощутима и другая тенденция простых чисел — выстраиваться вдоль верти-

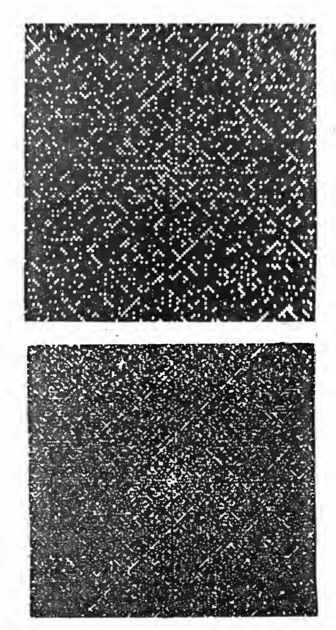


Рис. 204. Фотографии нарисованного вычислительной машиной узора («скатерти Улама»), на которых видно, что простые числа выстраиваются вдоль прямых. На верхней фотографии простые числа взяты в интервале от 1 до 10 000, на нижней — от 1 до 65 000.

33	32	31	30	29
34	21	20	19	28
35	22	17	18	27
36	23	24	25	26
37	38	39		

57	56	55	54	53
58	45	44	43	52
59	46	41	42	51
60	47	48	49	50
61	62	63		

Рис. 205. Диагонали, заполненные простыми числами, порождаемыми квадратичными трехчленами $x^2 + x + 17$ (слева) и $x^2 + x + 41$ (справа).

кальных и горизонтальных линий, на которых все клетки, свободные от простых чисел, заняты нечетными числами. Простые числа, попадающие на прямые, продолженные за отрезок, который содержит последовательные числа, лежащие на каком-то витке спирали, можно считать значениями некоторых квадратичных выражений, начинающихся с члена $4x^2$. Например, последовательность простых чисел 5, 19, 41, 71, стоящих на одной из диагоналей на рис. 204, — это значения, принимаемые квадратичным трехчленом $4x^2 + 10x + 5$ при x, равном 0, 1, 2 и 3. Из рис. 204 видно, что квадратичные выражения, принимающие простые значения, бывают «бедными» (дающими мало простых чисел) и «богатыми» и что на «богатых» прямых наблюдаются целые «россыпи» простых чисел.

Начав спираль не с 1, а с какого-нибудь другого числа, мы получим другие квадратичные выражения для простых чисел, выстраивающихся вдоль прямых. Рассмотрим спираль, начинающуюся с числа 17 (рис. 205, слева). Числа вдоль главной диагонали, идущей с «северо-востока» на «юго-запад», порождаются квадратичным трехчленом $4x^2 + 2x + 17$. Представляя положительные значения x, мы получаем нижнюю половину диагонали, подставляя отрицательные значения — верхнюю. Если рассмотреть всю диагональ и переставить простые числа в порядке возрастания, то окажется (и это приятный сюрприз), что все числа описываются более простой формулой $x^2 + x + 17$. Это одна из многих «производящих»

формул для простых чисел, открытых еще в XVIII веке великим математиком Леонардом Эйлером. При x, принимающем значения от 0 до 15, она дает только простые числа. Следовательно, продолжив диагональ до тех пор, пока она не заполнит квадрат 16×16, мы увидим, что вся диагональ заполнена простыми числами.

Самый знаменитый квадратичный трехчлен Эйлера, производящий простые числа, $x^2 + x + 41$, получится, если начать спираль с числа 41 (рис. 205, справа). Этот трехчлен позволяет получить 40 последовательных простых чисел, заполняющих всю диагональ квадрата 40×40! Давно известно, что из 2398 первых значений, принимаемых этим трехчленом, ровно половина простые. Перебрав все значения знаменитого трехчлена, не превышающие 10 000 000, Улам, Стейн и Уэллс обнаружили, что доля простых чисел среди них составляет 0,475... . Математикам очень бы хотелось открыть формулу, позволяющую получать при *каждом* целом x различные простые числа, но пока такой формулы обнаружить не удалось. Может быть, ее и не существует.

Спираль Улама подняла много новых вопросов, относящихся к закономерностям и случайностям в распределении простых чисел. Существуют ли прямые, на которых лежит бесконечно много простых чисел? Какова максимальная плотность распределения простых чисел вдоль прямых? Существенно ли различаются плотности распределения простых чисел в квадрантах «скатерти» Улама, если считать, что она продолжается неограниченно? Спираль Улама — забава, но ее следует принимать всерьез.

Хотя простые числа по мере продвижения в область больших чисел встречаются все реже и реже, наибольшего простого числа не существует. Бесконечность множества простых чисел была просто и изящно доказана еще Евклидом. Строго упорядоченный алгоритм решета Эратосфена наводит на мысль, будто найти формулу, позволяющую указывать точное число простых чисел на любом интервале числовой оси, — дело не такое уж трудное. Но сколько ни бились математики, им так и не удалось найти желанную формулу. В начале прошлого века была высказана (подкрепленная наблюдениями над таблицей простых чисел) гипотеза, согласно которой число простых чисел, не превышающих данного числа n,

приближенно выражается отношением $n/\ln n$ (ln — иатуральиый логарнфм) н что данное приближение тем лучше, чем больше число n. Эта удивнтельная теорема, известная под изваинем «теоремы об асимптотическом распределеиии простых чнсел», была строго доказаиа в 1896 году.

Найти редкие оазисы простых чнсел, затеряиные в обшнриых пустыиях составиых чнсел, покрывающнх все большие и большне нитервалы числовой оси, иелегко. Существуют миллноиы простых чисел, имеющнх ровио 100 цнфр, но пока ии одио такое число не обнаружено. В настоящее время рекордио большим среди известных простых чисел является число $2^{11213}-1$. Запись его содержит около 3376 цифр. Это чнсло обнаружил в 1963 году с помощью ЭВМ Дональд Б. Джиллис. До того как были изобретены современные быстродействующие ЭВМ, проверка даже шести- нли семизначных чисел требовала иескольких иедель утомительных вычислеиий. Эйлер както раз заявнл, будто число 1 000 009 — простое, ио поздиее обиаружнл, что оио является произведеинем двух простых чисел 293 и 3413. По тем временам это было крупным достнжеиием, еслн к тому же учесть, что Эйлеру было за 70 лет н ои к этому времени ослеп. Пьера Ферма в одиом нз писем спросилн, простое ли число 100 895 598 169. В ответиом письме Ферма сообщнл, что это чнсло разлагается иа произведение простых сомножнтелей 898 423 и 112 303. Подобные результаты иаводят на мысль, что старые мастера моглн владеть какнмто ныне утеряииым секретом, позволявшим нм с легкостью разлагать числа иа множнтели. В 1874 году У. Стенлн Джевоис вопрошал в своей книге «Осиовы науки»: «Может лн читатель сказать, произведение каких двух чисел равио 8 616 460 799? Думаю, что вряд ли кто-нибудь, кроме меия самого, сумеет дать ответ иа этот вопрос, ибо это два больших простых числа». Джевоису, изобретателю «логнческого пиаиино», не следовало бы столь опрометчнво делать заключеиия о скорости действня будущих вычнслнтельных машин. В нашн дии ЭВМ позволяет найтн оба числа (96 079 и 89 681) быстрее, чем он мог бы нх перемножнть.

Числа внда 2^p-1, где p — простое чнсло, называются числами Мерсеина, впервые заметившего, что среди таких чисел миого простых. В течеине почти 200 лет математнки подозревали, что чнсло Мерсенна $2^{67}-1$ про-

стое. Эрик Темпль Белл в своей книге «Математика — царица и служанка наук» рассказывает о заседании Американского математического общества, состоявшемся в октябре 1903 года в Нью-Йорке, на котором выступил с сообщением профессор Коул. «Коул, человек немногословный, — пишет Белл, — подошел к доске и, не говоря ни слова, начал возводить 2 в степень 67. Затем он вычел из полученного числа 1 и, по-прежнему не говоря ни слова, перешел на чистую часть доски, где столбиком перемножил два числа: 193 707 721 × 761 838 257 287. Оба результата совпали...» Впервые в истории Американского математического общества его члены бурными аплодисментами приветствовали докладчика. Коул, так и не проронив ни слова, сел на место. «Никто не задал ему ни одного вопроса». Через несколько лет Белл спросил у Коула, сколько времени тот потратил, чтобы разложить число на множители. «Все воскресенья в течение трех лет», — ответил Коул.

Генри Э. Дьюдени еще в 1907 году отметил, что 11 — единственное из известных простых чисел, которое состоит из одних лишь единиц. (Число, состоящее из повторения любой другой цифры, очевидно, составное.) Дьюдени сумел доказать, что все числа, состоящие из 3, 4, ..., 18 единиц, составные. Дьюдени заинтересовал вопрос, существуют ли более чем 18-значные простые числа, запись которых состоит из одних лишь единиц. Ответ на этот вопрос нашел один из читателей Дьюдени: он доказал, что 19-значное число 1 111 111 111 111 111 111 — простое. Позднее было доказано, что число, записанное с помощью 23 единиц, также простое. Ответы на многие вопросы, связанные с «единичными» числами, неизвестны до сих пор. Никто не знает, существует ли среди них бесконечно много простых чисел и даже существует ли вообще четвертое простое число, записанное с помощью одних единиц. Ближайший кандидат в простые числа состоит из 47 единиц (числа из 29, 31, 37, 41, 43, 53, 61 и 73 единиц составные).

Можно ли построить магический квадрат из одних лишь простых чисел? Оказывается, можно, и первым, кто сделал это, был Дьюдени. Такой квадрат показан на рис. 206. Его постоянная равна 111, это наименьшая из постоянных для магических квадратов, составленных из простых чисел. Однако простые числа в найденном

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Рис. 206. Магический квадрат из простых чисел с минимальной постоянной.

Дьюдени квадрате — не последовательные. Возникает вопрос: можно ли построить квадрат из последовательных нечетных простых чисел? (Единственное четное простое число нельзя вписать ни в один магический квадрат, ибо сумма чисел, стоящих в том столбце или в той строке, на пересечение которых находится 2, отличалась бы по четности от суммы чисел, стоящих во всех остальных строках и столбцах, вследствие чего квадрат не был бы магическим.) В 1913 году Дж. Н. Манси доказал, что наименьший магический квадрат из последовательных нечетных простых чисел должен иметь порядок 12. Этот любопытный результат известен настолько мало, что я решил воспроизвести его на рис. 207. В его клетках расставлены 144 первых простых числа. Постоянная этого магического квадрата (сумма чисел в любой строке, столбце или на диагоналях) равна 4514.

На этом мы закончим первое знакомство с простыми числами. Читатель сможет проверить свои знания, ответив на следующие элементарные вопросы:

1. Укажите четыре простых числа среди следующих шести чисел:

10 001
14 159
76 543
77 377
123 456 789
909 090 909 090 909 090 909 090 909 090

(Примечание: второе число представляет собой первые пять цифр десятичного разложения числа π.)

2. Две шестерни, на каждой из которых нарисовано по стрелке, находятся в положении, изображенном на рис. 208. Маленькая шестерня вращается по часовой

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Рис. 207. Наименьший из магических квадратов, составленных из последовательных нечетных простых чисел.

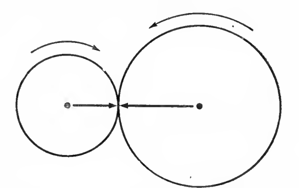


Рис. 208. Задача о двух шестернях.

стрелке до тех пор, пока стрелки на обоих шестернях не совпадут снова. Сколько оборотов успеет совершить маленькая шестерня до того, как стрелки совпадут, если число зубцов у большой шестерни равно 181?

3. Из девяти цифр от 1 до 9 составьте три простых числа так, чтобы их сумма была минимальной. Каждую цифру разрешается использовать один и только один раз. Например, числа 941, 827 и 653 простые и удовлетворяют последнему требованию, но их сумма (2421) не минимальна.

4. Найдите составное число среди чисел

31, 331, 3331, 33 331, 333 331, 3 333 331, 33 333 331, 333 333 331

5. Найдите отрезок числовой оси длиной в миллион единиц, не содержащий ни одного простого числа.

ОТВЕТЫ

1. Составными являются числа 10 001 (равно произведению двух простых чисел 73 и 137) и 123 456 789, которое делится на 3. Все остальные числа — простые.

2. Две находящиеся в зацеплении шестерни не могут вернуться в исходное положение до тех пор, пока на обеих шестернях через точку касания не пройдет некоторое число зубцов k. Число k есть наименьшее общее кратное числа зубцов каждой из шестерен. Пусть n — число зубцов меньшей шестерни. Из условия задачи известно, что у большой шестерни имеется 181 зубец. Поскольку число 181 простое, наименьшее общее кратное чисел 181 и n равно $181n$. Следовательно, прежде чем совпадут стрелки на обеих шестернях, меньшая шестеренка успеет совершить 181 оборот.

3. Как из цифр от 1 до 9 составить три простых числа, сумма которых была бы наименьшей? Попробуем сначала составить три трехзначных простых числа. Их последними цифрами могут быть только 1, 3, 7 и 9 (это утверждение верно для всех простых чисел, начиная с 7).

Выберем цифры 3, 7 и 9, тогда единица сможет быть первой цифрой. Чтобы первые цифры чисел были как можно меньше, необходимо выбирать их среди цифр 1, 2 и 4. Таким образом, 5, 6 и 8 остаются для средней цифры трехзначных чисел. Среди 11 трехзначных чисел, удовлетворяющих нашему выбору цифр, любые три непременно содержат хоть одну повторяющуюся цифру. Следовательно, нужно попробовать выбирать первые цифры из набора 1, 2, 5. Ответ в этом случае оказывается однозначным:

$$\begin{array}{r} 149 \\ 263 \\ 587 \\ \hline 999 \end{array}$$

4. Последнее число 333 333 331 делится на 17.

5. Построить сколь угодно большой интервал на числовой оси, который бы не содержал ни одного простого числа, нетрудно. Предположим, что нам нужно найти 1 000 000 последовательных целых чисел, среди них нет ни одного простого. Рассмотрим прежде всего число 1 000 001! (восклицательный знак означает «факториал» — произведение $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1\,000\,001$). В качестве числа нужного нам интервала выберем число 1 000 0001 + 2. Мы знаем, что число 1 000 000! делится на 2 (двойка входит в него в качестве сомножителя), второе слагаемое (равное 2) также делится на 2, следовательно, и сумма — число 1 000 000! + 2 — делится на 2. Далее идет число 1 000 001 + 3. Тройка — один из сомножителей, на которые разлагается по определению факториала число 1 000 001, следовательно, 1 000 000 делится на 3. Отсюда следует, что и 1 000 000 + 3 также делится на 3. Аналогичными рассуждениями показываем, что составными являются все остальные числа интервала от 1 000 001 + 4 до 1 000 001! + 1 000 001. Таким образом, отрезок числового ряда длиной в миллион единиц, не содержащий ни одного простого числа, построен. Существует ли миллион меньших последовательных чисел, среди которых также нет ни одного простого? Да, существует. Для построения ее достаточно вычитать из 1 000 001! последовательные числа 2, 3 и т. д. до тех пор, пока мы не дойдем до числа 1 000 001! — 1 000 001.

ГЛАВА 35

ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

Инженер чертит схемы электрических цепей. Химик рисует структурные формулы, чтобы показать, как в сложной молекуле с помощью валентных связей соединяются друг с другом атомы. Историк прослеживает родословные связи по генеалогическому дереву. Военачальник наносит на карту сеть коммуникаций, по которым из тыла к передовым частям доставляется подкрепление. Социолог на сложнейшей диаграмме показывает, как подчиняются друг другу различные отделы одной огромной корпорации.

Что общего во всех этих примерах? В каждом из них фигурирует схема, состоящая из точек (они обозначают разветвления электрической цепи, атомы, людей, города и т. д.), соединенных между собой линиями. В 30-е годы немецкий математик Дене Кениг впервые провел систематическое исследование подобных схем и дал им общее название «графы». Теория графов находится сейчас в самом расцвете. Обычно ее относят к топологии (потому что во многих случаях рассматриваются лишь топологические свойства графов), однако она пересекается со многими разделами теории множеств, комбинаторной математики, алгебры, геометрии, теории матриц, теории игр, математической логики и многих других математических дисциплин.

Первая книга Кенига о графах вышла в Лейпциге в 1936 году. В 1962 году в Англии была издана книга французского математика Клода Бержа «Теория графов и ее приложение» *. В 1936 году увидела свет небольшая брошюра Ойстена Оре **, содержащая блестящее эле-

* К. Берж, Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.
** О. Оре, Графы и их применение, М., изд-во «Мир», 1965.

ментарное введение в теорию графов. Обе книги, безусловно, представляют интерес для любителей занимательной математики. Сотни известных головоломок, на первый взгляд не имеющих ничего общего друг с другом, легко решаются с помощью теории графов. В этой главе речь пойдет о «плоских графах» и о некоторых наиболее интересных головоломках, связанных с этими графами.

Плоским графом называется множество точек (вершин), которые соединены между собой линиями (ребрами) так, что у нарисованного на плоскости графа никакие два ребра не пересекаются. Представьте себе, что ребра графа — это эластичные нити, которые можно как угодно изгибать, растягивать или укорачивать. Будет ли плоским графом фигура, изображенная на рис. 209 слева? (Каждая из четырех вершин обозначена кружком. Пересечение двух диагоналей квадрата вершиной не считается: в этом месте одна линия проходит под другой.) Да, изображенная на рисунке фигура относится к плоским графам, потому что точку пересечения можно очень легко ликвидировать, изменив положение одной из вершин так, как показано на рис. 209 в центре, или же растянув какое-нибудь ребро, как показано на том же рисунке справа. Все три графа на рис. 209 «изоморфны», то есть представляют собой три разных способа изображения одного и того же плоского графа. Ребра любого многогранника, например куба, тоже образуют плоский граф, потому что каркас многогранника всегда можно растянуть до такой степени, что он распластается на плоскости и при этом не будет иметь точек пересечения. Каркас тетраэдра изоморфен любому из трех графов, изображенных на рис. 209.

Не всегда просто понять, является ли данный граф плоским. Обратимся к одной из самых старых топологических задач, которая особенно долго не поддавалась решению и будоражила умы любителей головоломок (рис. 210). Мы сохраним ту же формулировку этой задачи, которую ей дал в 1917 году Генри Э. Дьюдени. С тех пор она известна как «задача об электро-, газо- и водоснабжении». В каждый из трех домов, изображенных на рис. 210, необходимо провести газ, свет и воду. Можно ли так проложить коммуникации, чтобы они, нигде не пересекаясь друг с другом, соединяли каждый дом с источниками электричества, газа и воды? Иначе говоря,

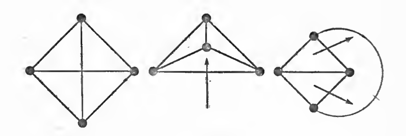


Рис. 209. Три способа вычерчивания полного графа с четырьмя вершинами.

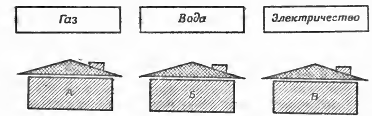


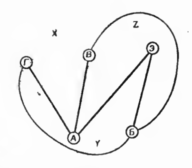
Рис. 210. Задача об электро-, газо- и водоснабжении.

можно ли построить плоский граф с вершинами в шести указанных точках?

Оказывается, такой граф построить нельзя. Проверить это несложно. Предположим, что коммуникации надо подвести лишь к домам *А* и *Б*. Чтобы коммуникации нигде не пересекались, вам придется разделить плоскость на три области, например так, как показано на рис. 211, Рисовать точно такую же схему совершенно не обязательно, но, как бы вы ни соединяли вершины, ваш граф будет изоморфен графу, изображенному на рисунке. Дом *В*, таким образом, попадает в одну из трех областей. Попав в область *X*, он окажется без света. Находясь в области *Y*, он будет отрезан от воды. В области *Z* в него прекратится подача газа. Все сказанное остается в силе и в том случае, если граф начерчен на поверхности сферы, однако существуют поверхности, для которых ситуация меняется. К ним относится, например, поверхность бублика: на ней совсем несложно нарисовать граф, у которого ребра пересекаются только в шести вершинах.

Граф называют полным, если каждая пара его вершин соединена между собой. Из рис. 209 видно, что пол-

Рис. 211. Доказательство неразрешимости задачи об электро-, газо- и водоснабжении.



ный граф с четырьмя вершинами является плоским. Будет ли плоским полный граф с пятью вершинами? Оказывается, не будет; нестрогое доказательство этого утверждения очень просто, и читатель может попробовать провести его самостоятельно. То обстоятельство, что полный граф может быть плоским лишь в том случае, если число его вершин меньше или равно четырем, представляет интерес и с философской стороны. Многие философы и математики пытались ответить на вопрос, почему физическое пространство имеет три измерения *. Английский специалист по космологии Г. Дж. Уитроу в своей книге «Структура и эволюция Вселенной» ** утверждает, что разум не мог бы возникнуть в пространстве с размерностью, большей трех, ибо в пространствах высших размерностей планеты не могут двигаться вокруг Солнца по стационарным орбитам. А как обстоит дело в одномерных и двумерных пространствах? Уитроу считает, что теория графов полностью исключает возможность существования разумных лайнландцев и флатландцев, о которых мы уже рассказывали в главе 17. Мозг состоит из огромного количества нервных клеток (соответствующих вершинам графа), попарно соединенных между собой нервными волокнами (ребрами графа), которые нигде не пересекаются друг с другом. Трехмерное пространство не накладывает никаких ограничений на число нервных клеток, удовлетворяющих этим требованиям, а во Флатландии максимальное число таких клеток, как мы уже видели, было бы равно четырем.

* См., например, книгу А. М. Мостепаненко и М. В. Мостепаненко, Четырехмерность пространства и времени, М.—Л., изд-во «Наука», 1966.

**) G. J. Witrow, The Structure and Evolution of the Universe, Harper Textbooks, 1959.

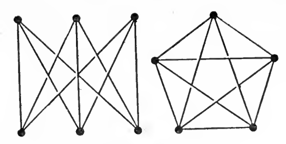


Рис. 212. Простейшие пространственные графы.

«Таким образом,— пишет Уитроу,— мы приходим к заключению, что число измерений физического пространства обязательно должно быть равно трем и не может быть ни больше, ни меньше, потому что это единственное условие, при котором происходит развитие высших форм земной жизни, в частности человека, *сформулировавшего задачу,* решением которой мы занимаемся».

Относительно двух простейших пространственных графов (относительно графа задачи об электро-, газо- и водоснабжении, известного также под названием графа Томсена, и полного графа с пятью вершинами) говорится в одной очень важной теореме — так называемой теореме Куратовского (в честь польского математика, которому принадлежит ее открытие). Теорема утверждает, что каждый граф, не являющийся плоским, содержит в качестве подграфа один из двух простейших пространственных графов. Иными словами, двигаясь вдоль ребер любого пространственного графа, мы всегда можем вычертить по крайней мере один граф, изоморфный либо правому, либо левому графу на рис. 212.

Перед инженером нередко встают задачи, решение которых сводится к вычерчиванию какого-нибудь плоского графа. Если, например, в печатной схеме пересекутся два проводника, то вся схема окажется закороченной. Читатель может испытать свои силы в составлении плоских графов на примере двух печатных схем, показанных на рис. 213. На верхней схеме требуется соединить между собой пятью линиями точки, обозначенные одинаковыми буквами (то есть точку A с точкой A, B с B и т. д.), причем так, чтобы линии не пересекались друг с другом и не выходили за пределы прямоугольника. Две линии

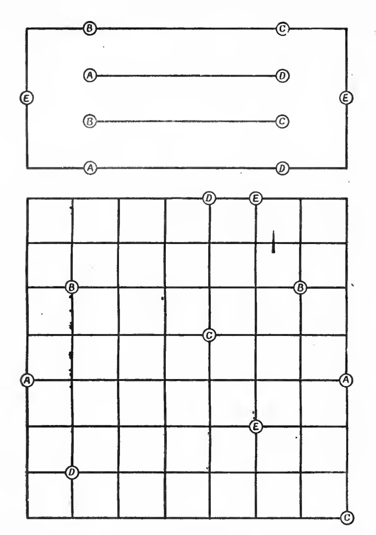


Рис. 213. Две задачи о печатных схемах.

AD и BC означают некие барьеры, пересекать которые по тем или иным причинам запрещается. На нижней схеме надо также соединить между собой точки с одинаковыми буквами с помощью пяти линий, но на этот раз каждая линия обязательно должна проходить только вдоль прямых, образующих сетку. Линии могут пересекаться друг с другом только в вершинах графа. Обе изложенные задачи весьма просты.

Перейдем к другому хорошо известному типу задач, в которых заданный плоский граф требуется вычертить, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя дважды один и тот же участок графа. Если при этом получается замкнутая линия, начинающаяся и кончающаяся в одной и той же вершине, то такой граф называют эйлеровым, а соответствующую линию — эйлеровой линией. В 1736 году Леонард Эйлер решил знаменитую задачу о семи кенигсбергских мостах. В задаче требовалось пройти по всем семи мостам города Кенигсберга (ныне Калининграда) и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому из мостов один и только один раз. Эйлер обнаружил, что эта задача полностью эквивалентна задаче о вычерчивании простого графа, и показал (в самой первой в истории работе по теории графов), что если все вершины графа четны (то есть четно число пересекающихся в вершинах ребер графа), то граф можно обойти за один цикл, не проходя ни одного ребра дважды. Если две вершины графа нечетны (то есть число пересекающихся ребер в этих вершинах нечетно), то замкнутого цикла не существует, но зато можно, выйдя из одной нечетной вершины, обойти весь граф и вернуться во вторую нечетную вершину. Если число нечетных вершин равно $2k$ (а существует теорема, согласно которой число нечетных вершин всегда четно), то граф можно обойти вдоль k отдельных кривых, каждая из которых начинается и кончается в нечетных вершинах. Граф в задаче о кенигсбергских мостах содержит четыре нечетные вершины, поэтому требуются самое малое две кривые (ни одна из которых не будет замкнутым циклом), чтобы обойти все ребра графа.

Любой эйлеров граф можно обойти вдоль эйлеровой линии, то есть вдоль кривой, которая проходит по каждому ребру графа и не имеет точек самопересечения. В биографии Льюиса Кэррола, написанной его племян-

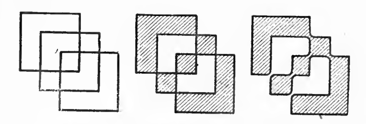


Рис. 214. Задача Льюиса Кэррола о трех квадратах.

ником, говорится о том, что Кэррол очень любил задавать маленьким девочкам головоломку, изображенную на рис. 214: граф, показанный на этом рисунке слева, нужно было обвести, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя одно и то же ребро дважды (иначе говоря, требовалось начертить эйлерову линию графа). Если допустить, чтобы линии пересекались, то задача решается просто. Решение весьма усложняется, если пересечение линий запрещено. Подобные задачи быстро решаются с помощью метода, предложенного Томасом О'Бейрном из Эдинбурга. Раскрасив чертеж так, как показано на рис. 214 в центре, надо разъединить граф в некоторых вершинах таким образом, чтобы раскрашенная часть оказалась «односвязной» (подчеркнем, что односвязной должна быть закрашенная область, а не область, получающаяся при присоединении к ней незакрашенных участков). Тогда периметр закрашенной области и будет искомой эйлеровой линией (рис. 214, справа). Применив изложенный метод к графу, изображенному на рис. 215 (его придумал О'Бейрн), вы увидите, какой удивительной симметрией будет обладать построенная вами эйлерова линия.

Существует еще один вид задач, связанных с путешествием вдоль графов. Они совершенно не похожи на те, которыми мы до сих пор занимались, и, как это ни странно, оказываются гораздо более сложными. Речь идет о задачах, в которых требуется отыскать путь, проходящий вдоль каждого ребра графа один и только один раз. Линия, которая ни через одну из вершин не проходит более одного раза, называется дугой. Дуга, которая начинается и оканчивается в одной и той же точке, называется циклом. В свою очередь цикл, проходящий через каждую вершину один и только один раз, носит название гамиль-

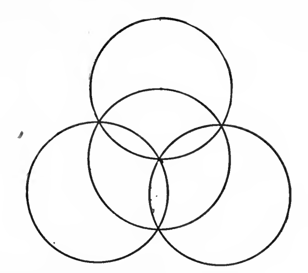


Рис. 215. Задача О'Бейрна о четырех окружностях.

тоновой линии (в честь Уильяма Роуэна Гамильтона, знаменитого ирландского математика прошлого века, который первым начал изучать такие линии). Гамильтон показал, что вдоль ребер любого из пяти правильных многогранников можно проложить путь, который будет гамильтоновой линией. Он даже изготовил для фабрики игрушек одну головоломку, которая сводилась к нахождению гамильтоновых линий, проходящих вдоль ребер додекаэдра.

На первый взгляд может показаться, что по аналогии с задачей об эйлеровых линиях здесь тоже должны существовать простые правила для определения того, принадлежит ли данный граф к числу гамильтоновых или нет. Однако эти две задачи неожиданно оказываются совершенно разными. Эйлерова линия должна проходить через каждое ребро один и только один раз, но зато она может сколько угодно раз проходить через любую вершину. Гамильтонова же линия, наоборот, должна, один и только один раз проходить через каждую вершину, но ей вовсе не обязательно проходить вдоль каждого ребра (в любой вершине она проходит ровно по двум примыкающим к этой вершине ребрам). Во многих областях,

Рис. 216. Каркас ромбического додекаэдра.

не нмеющнх на первый взгляд никакого отиошення к гамильтоновым лнннням, последнне тем не менее играют очень важную роль. Определяя, например, нанболее целесообразную последовательность выполнення некоторой серни операций, их нногда можно представнть в виде графа, н тогда любая гамильтонова лнння будет нскомым оптнмальным решеиием. К сожаленню, пока еще не найден общий критернй, с помощью которого можно было бы решнть, является лн данный граф гамильтоиовым, и еслн да, то найтн на нем все гамильтоновы лнннн.

Каркасы многнх (ио не всех) правнльных миогогранников представляют собой гамильтоновы графы. Исключение составляет ромбическнй додекаэдр (рнс. 216), форму которого нередко принимают крнсталлы граната. Даже отказавшнсь от требовання замкнутостн траекторнн, вам все равно не удастся обойтн все вершины этого миогогранннка, побывав в каждой нз ннх лишь по одиому разу. Остроумное доказательство этого факта, которое вы сейчас прочтете, впервые прндумал Коксетер. На рис. 216 черными кружками отмечены все вершины со степенью, равной 4, а заштрнхованные кружкн обозиачают вершнны, степень которых равна 3. Заметнм, что каждую заштрнховаиную вершнну со всех сторои окружают черные кружкн н, наоборот, каждую черную вершнну окружают заштрихованные. Поэтому в любом путн, проходящем через все четырнадцать вершнн, цветные н заштрнхованные кружкн обязательно должны чередоваться. Однако черных кружков шесть, а заштрнхованных — восемь! Такнм образом, не существует ни одного путн (замкнутого нлн незамкнутого), в котором цвет кружка менялся бы от вершнны к вершнне.

Рассмотрим одну старинную шахматную задачу, которая на первый взгляд не нмеет ничего общего с гамнль-

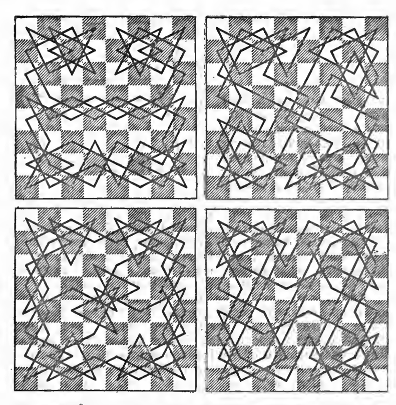
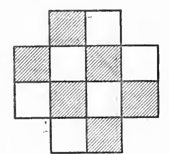


Рис. 217. Некоторые решения задачи об обходе всех клеток шахматной доски ходом коня.

тоновыми графами. Пусть конь стоит на любом поле шахматной доски. Требуется определить непрерывную траекторию, вдоль которой должен перемещаться конь, чтобы, побывав по одному разу в каждой клетке доски, вернуться последним ходом на исходное поле. Обозначим каждую клетку точкой, а каждый ход конем — линией, соединяющей соответствующие точки. В результате у нас, конечно, получится граф. Любой цикл, проходящий через каждую вершину, один и только один раз будет гамильтоновой линией, а каждая такая линия дает искомую траекторию коня.

Если доска состоит из нечетного числа клеток, то задача оказывается неразрешимой. (Попробуйте сообра-

Рис. 218. Как обойти ходом коня все клетки такой доски?



зить, почему.) Если же число клеток четно, то на любой прямоугольиой доске, у которой одна сторона состоит из пяти или большего числа клеток, интересующая нас траектория существует. Таким образом, размер самой маленькой прямоугольиой доски, иа которой можно провести коия вдоль замкнутого пути, равен 5×6, а размер самого малеиького квадрата составляет 6×6. Существуют миллиоиы различных замкиутых путей, вдоль которых можно обойти коием все клетки обычиой шахматной доски 8×8. Этому вопросу посвящеиа обширная литература, но число путей иикто не подсчитывал. Обычно исследуются лишь те траектории, которые обладают всякими интересиыми свойствами симметрии. Открыты тысячи красивейших узоров, иаподобие тех, что показаны на рис. 217. На доске 8×8 нет траекторий, обладающих симметрией четвертого порядка (то есть ие меняющих свой вид при любом числе поворотов иа 90°), зато иа квадратной доске со стороиой в шесть клеток есть целых пять таких траекторий.

Я предлагаю читателям решить одну задачу, которая может служить вводным упражиением к этой классической области занимательиой математики. Требуется обойти конем все двенадцать клеток простой доски, изображенной иа рис. 218, причем в каждой клетке надо побывать только по одному разу. Начинать и кончать обход можно иа любой клетке, ио обязательно иа одиой и той же. Отыскав решеиие, попробуйте ответить еще на один вопрос, который покажется вам более трудным. У коия на этой доске существует шестнадцать различиых ходов. Можно ли из всех этих ходов составить непрерывную цепь, которая проходила бы по всем клеткам иашей двенадцатиклеточной доски, причем так, чтобы ии один ход не повторялся? Мы будем говорить, что ход сделан, если конь перепрыгнул в любом направлении с одиой

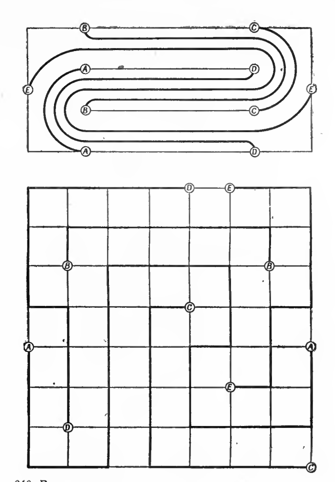


Рис. 219. Решения двух задач о печатных схемах.

клетки на другую. Разумеется, конь может побывать на одной и той же клетке несколько раз, и ему совершенно не обязательно заканчивать путь на той же клетке, с которой он начинал. Не разрешается лишь одно — делать один и тот же ход дважды.

В том, что задача неразрешима, вы убедитесь довольно быстро, но тогда возникает другой вопрос: чему равно наименьшее число отдельных линий, которые можно по-

строить из всех 16 ходов коня? Ответ на этот вопрос займет у вас буквально несколько минут, если вы воспользуетесь одной из теорий графов, которая приводилась в этой главе.

ОТВЕТЫ

Решения обеих задач с печатными схемами показаны на рис. 219. Применив к задаче о четырех окружностях метод двух красок, вы получите симметричную эйлерову линию, свободную от точек самопересечения (рис. 220). В левой части рис. 221 показана последовательность ходов, которые должен сделать конь, чтобы, побывав по одному разу на всех клетках крестообразной доски, вернуться на исходное поле. Посмотрим, существует ли хотя бы одна замкнутая линия, состоящая из всех 16 ходов коня и при этом проходящая по всем клеткам доски. Прежде всего начертим граф, на котором виден каждый ход коня (рис. 221, справа). Заметим, что в восьми вершинах число пересекающихся ребер нечетно. Тогда по одной из теорем Эйлера для того, чтобы конь прошел вдоль каждого ребра этого графа один и только один раз, его путь должен состоять по меньшей мере из $^{8}/_{2}$ (то есть из 4) отдельных линий, каждая из которых выходит из одной нечетной вершины и входит в другую.

Докажем теперь, что, когда доска состоит из нечетного числа клеток, конь не может обойти их все по одному разу и вернуться на прежнее место. Для доказательства раскрасим клетки доски в шахматном порядке. После каждого хода конь оказывается на поле другого цвета, поэтому если его путь замкнут, то он должен проходить через одинаковое число темных и светлых клеток. На

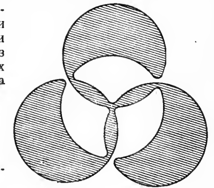


Рис. 220. Решение задачи о четырех окружностях.

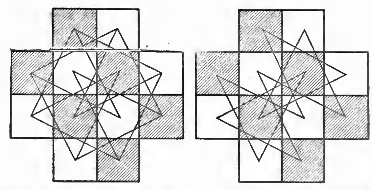


Рис. 221. Графы решения задачи об обходе всех клеток крестообразной доски ходом коня (слева) и о ломаных, составленных из 16 ходов коня (справа).

доске же, состоящей из нечетного числа клеток, независимо от ее формы, число темных и светлых клеток будет разным.

ГЛАВА 36

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Всегда найдется какой-нибудь образованный антрополог, страстно желающий провести параллель между путями развития человечества и путями развития математики. Ссылаясь на то, что на ранней ступени развития различные народы пользовались разными системами счисления, он будет утверждать, будто арифметические законы тоже изменяются от одной культуры к другой. На самом же деле за любой системой счисления стоит, конечно, одна и та же старушка — арифметика, а различные системы счисления служат не более чем различными языками, то есть по-разному называют, обозначают и обращаются *с одними и теми же* числами. Два плюс два всегда равно четырем, а правильный перевод с одного языка на другой возможен во всех случаях.

Любое целое число, кроме нуля, может служить основанием одной из систем счисления. Простейшая система счисления имеет в качестве основания единицу и оперирует одним-единственным символом. Примером использования единичной системы могут служить насечки, которые житель необитаемого острова делает на дереве, чтобы не потерять счет дням, или же нанизанные на проволоку шарики, по которым игроки в бильярд ведут счет очкам. В двоичной системе число символов равно двум: 0 и 1. В распространенной сейчас во всем мире десятичной системе используется десять символов. Чем больше основание, тем компактнее записывается любое большое число. Число 1000, записанное в десятичной системе, при переходе в двоичную систему потребует десять знаков (1111101000), а в единичной системе будет состоять уже из 1000 знаков. Неудобство систем с большим основанием состоит в том, что приходится запоминать больше цифр и составлять обширные таблицы сложения и умножения.

Время от времени некоторые реформисты обнаруживают поистине фанатическое рвение в попытке свергнуть так называемую «тиранию десятки» и заменить число 10 каким-нибудь другим основанием, по их мнению, более удобным. Совсем недавно была очень популярна двенадцатеричная система счисления с основанием, равным 12. Основное преимущество двенадцатеричной системы состоит в том, что ее основание делится без остатка на 2, 3 и 4 (бесконечная десятичная дробь 0,3333..., равная $^1/_3$, в двенадцатеричной системе записывается всего одним знаком после запятой: 0,4). Сторонники двенадцатеричной системы появились еще в XVI веке. В более позднее время к их числу принадлежали столь выдающиеся люди, как Герберт Спенсер, Джон Квинси Адамс и Джордж Бернард Шоу. Герои романа Г. Дж. Уэллса «Когда спящий проснется» пользуются двенадцатеричной системой счисления вплоть до 2100 года. Существует даже Американское двенадцатеричное общество, выпускающее два периодических издания: «Двенадцатеричный бюллетень» («The Duodecimal Bulletin») и «Руководство по двенадцатеричной системе («Manual of the Dozen System»). Всех «двенадцатеричников» общество снабжает специальной счетной линейкой, в которой в качестве основания используется 12. По уставу общества число 10 обозначается знаком X (читается дэк), а число

11 — знаком Ɛ (тройка, отраженная в зеркале), который произносится как «эл». Первые три степени числа 12 называются соответственно до, гро, мо; поэтому, скажем, число IIIX читается следующим образом: мо-гро-до-дек. Сторонникам шестнадцатеричной системы написано немало забавнейших книг. В 1862 году Джон У. Нистром выпустил в Филадельфии частное издание — «Проект новой арифметической и денежной системы, а также системы мер и весов, которую предлагается называть тональной системой, с основанием, равным шестнадцати» («Project of a New System of Arithmetic, Weight, Measure and Coins, Proposed to be called the Tonal System, with Sixteen to the Base»).

В своем «Проекте» Нистром требует, чтобы числа от 1 до 16 назывались эн, ди, тай, гоу, сю, бай, ра, ми, най, коу, хью, вай, ла, поу, фай, тон. Джозеф Боуден, математик из Адельфийского колледжа, считал наиболее подходящим основанием также число 16, но предлагал сохранить обычные названия для чисел от 1 до 12, а остальные четыре числа называть тран, фрон, фин, ванти. В обозначениях Боудена число 255 запишется как ƸƸ. Этот символ читается «финти фин» *.

В ближайшее время едва ли кому-нибудь удастся «свергнуть тиранию 10», но это не мешает математику решать каждую задачу в той системе счисления, которая представляется ему наиболее целесообразной. Пусть, например, изучаемое им явление описывается параметром, принимающим всего два значения. (Этим «явлением» может быть программа для вычислительной машины, работающей по схеме «да — нет».) Тогда двоичная система может оказаться значительно эффективнее, чем десятичная. Точно так же задачи, характеризующиеся тремя величинами, нередко легче всего решаются в троичной системе, имеющей своим основанием число 3.

В троичной арифметике имеется три знака: 0, 1, 2. В числе, записанном в троичной системе, каждая цифра означает, что ее надо умножить на определенную степень 3, причем чем левее стоит цифра, тем выше степень. Рассмотрим, например, троичное число 102. Двойка означает, что ее надо умножить на 3^0 (что дает $2 \times 1 = 2$), 0 обозначает «пустой разряд», то есть 3^1 отсутствует,

* См. по этому поводу гл. 2 в книге J. Bowden, Special Topics in Theoretical Arithmetic, 1936.

Единицу в старшем разряде надо умножить на 3^2, то есть $1 \times 9 = 9$. Сложив все три числа, мы получим $2 + 0 + 9 = 11$. Одиннадцать — это десятичный эквивалент троичного числа 102. Ниже показано, как записываются в троичной системе числа от 1 до 27. (Между прочим, китайские счеты * можно очень легко приспособить под вычисление в троичной системе. Для этого их достаточно перевернуть и использовать ту часть, где костей не пять, а всего две.)

Десятичные числа	Троичные числа
	3^3 3^2 3^1 3^0
1	1
2	2
3	1 0
4	1 1
5	1 2
6	2 0
7	2 1
8	2 2
9	1 0 0
10	1 0 1
11	1 0 2
12	1 1 0
13	1 1 1
14	1 1 2
15	1 2 0
16	1 2 1
17	1 2 2
18	2 0 0
19	2 0 1
20	2 0 2
21	2 1 0
22	2 1 1
23	2 1 2
24	2 2 0
25	2 2 1
26	2 2 2
27	1 0 0 0

* Счеты, у которых каждая проволока разделена на две части. На одну часть надето пять костей, а на вторую — две. — *Прим. перев.*

Наиболее привычная ситуация, в которой проявляется необходимость троичного анализа,— это, пожалуй, взвешивание на чашечных весах. Здесь могут возникнуть три разных случая: либо одна из чашек перевесит другую, либо наоборот, либо же чашки уравновесят друг друга. Еще в 1624 году Клод Гаспер Баше во втором издании своей книги по занимательной математике опубликовал задачу. В ней нужно было определить, какое минимальное число гирь потребуется для того, чтобы взвесить любой предмет, вес которого равен целому числу фунтов, заключенному между 1 и 40. Оказывается, что если гири разрешается класть лишь на одну чашу весов, то их требуется по меньшей мере 6, причем вес самой легкой гири составляет 1 фунт, а каждая последующая в два раза тяжелее предыдущей. Иными словами, получается ряд, состоящий из последовательных степеней числа 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Если же гири разрешается класть на обе чаши весов, то гирь потребуется всего лишь 4, а их веса образуют ряд последовательных степеней числа 3: 1, 3, 9, 27.

Пусть перед нами лежит какой-то предмет весом n фунтов. Какие гири понадобятся для того, чтобы его взвесить? Прежде всего запишем число n в троичной системе. Затем изменим обозначения и вместо цифр 0, 1, 2 будем писать 0, 1, —1. Для этого каждую двойку в числе n заменим на —1, а цифру, стоящую слева от нее, увеличим на 1. Если при этом появляется новая двойка, то с ней надо проделать в точности то же самое. Если же возникает 3, то вместо нее надо написать 0, а к цифре, стоящей слева, прибавить 1. Пусть, например, вес предмета составляет 25 фунтов. Записав это число в троичной системе, мы получим 221. Заменим первую цифру 2 на —1, а слева перед всем числом напишем 1. Вместо второй двойки тоже поставим —1 и прибавим 1 к цифре, стоящей слева. У нас получится число 10—11. Оно эквивалентно первоначальному (простая проверка дает: $27 + 0 - 3 + 1 = 25$), но зато по его виду можно сразу сказать, какие понадобятся гири и на какую чашу весов их следует класть. На одну из чаш кладется взвешиваемый предмет. Рядом с ним ставятся гири, соответствующие цифрам со знаком минус. Цифры, имеющие знак плюс, обозначают гири, которые нужно поставить на другую

чашу весов. На рис. 222 показано, как надо распределить гири, чтобы взвесить предмет в 25 фунтов.

Пусть вы хотите определить вес какого-то предмета, зная, что он равен целому числу фунтов от 1 до 27. Каким наименьшим числом гирь можно обойтись, если их разрешается класть на обе чашки весов? Здесь нет никакой ловушки, хотя одна небольшая хитрость все же имеется, и вам вряд ли удастся с первого же раза назвать правильный ответ.

В качестве примера более сложных задач о взвешивании рассмотрим задачу о 12 монетах (впервые о ней заговорили в 1945 году; с тех пор опубликовано немало статей, посвященных ее разбору). Имеется двенадцать совершенно одинаковых монет, среди которых есть одна фальшивая. Известно, что эта монета либо чуть-чуть тяжелее, либо чуть-чуть легче остальных. Можно ли с помощью трех взвешиваний найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящая, если в вашем распоряжении есть весы с двумя чашами, но нет гирь?

Эта задача была блестяще разобрана К. Л. Стонгом в майском номере журнала Scientific American за 1955 год. Одно из ее решений (а их довольно много) связано с троичной системой.

Сначала запишите все числа от 1 до 12 в троичной системе. Замените в каждом числе цифру 2 на 0, а 0 на 2 и запишите рядом результат. У вас получится три столбца чисел:

1	001	221
2	002	220
3	010	212
4	011	211
5	012	210
6	020	202
7	021	201
8	022	200
9	100	122
10	101	121
11	102	120
12	110	112

Внимательно изучив эти числа, вы обнаружите все числа, в которых встречаются сочетания 01, 12, 20

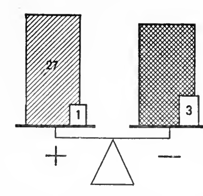


Рис. 222. Как взвесить предмет весом 25 фунтов.

(в таблице они выделены жирным шрифтом). Каждой из двенадцати монет поставим в соответствие одно из этих чисел.

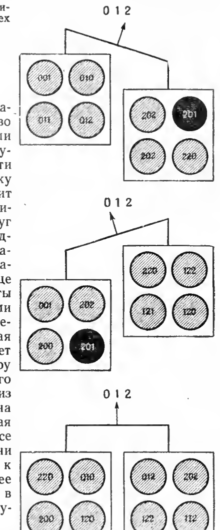
При первом взвешивании на левую чашу весов кладем четыре монеты, обозначенные числами, которые начинаются с 0, а на правую чашу весов кладем те четыре монеты, которым соответствуют числа, начинающиеся с 2. Если монеты уравновесят друг друга, вы можете утверждать, что число, которое отвечает фальшивой монете, начинается с 1. Если перевесит левая чашка, то искомое число начинается с 0, а если правая — то с 2.

Взвешивая монеты второй раз, их надо распределять в зависимости от средней цифры. Если в центре стоит 0, монета кладется на левую чашу, если 2 — на правую. Вторая цифра числа, обозначающего фальшивую монету, определяется точно так же, как определялась его первая цифра при первом взвешивании.

Производя последнее взвешивание, вы кладете налево те монеты, которые обозначены числами, оканчивающимися на 0, а монеты, соответствующие числам, имеющим на конце 2, вы кладете на правую чашу весов. Таким образом вы узнаете последнюю цифру нужного вам числа. На рис. 223 видно, что после трех взвешиваний фальшивой оказалась монета 201. Она явно тяжелее всех остальных, потому что и на верхней, и на нижней схеме чаша с этой монетой перевешивает.

С задачей о 12 монетах тесно связаны многие карточные фокусы. Один из лучших фокусов известен под названием задачи Жергонна о трех стопках карт (в честь французского математика Жозефа Диеца Жергонна, который первым занялся анализом этой задачи еще в начале XIX века). Одного из зрителей просят просмотреть колоду из 27 карт и одну из них запомнить. Затем, держа колоду открытой картой вниз, зритель вынимает из нее

Рис. 223. Как найти фальшивую монету с помощью трех взвешиваний.



по одной карте и раскладывает их слева направо в три стопки картинками вверх. Каждая стопка будет состоять из девяти карт. Указав фокуснику стопку, в которой лежит задуманная карта, зритель кладет стопки друг на друга в любом порядке, затем опять переворачивает колоду картинками вниз и начинает еще раз раскладывать карты в три стопки картинками вверх. Показав, где теперь лежит задуманная карта, зритель повторяет ту же самую процедуру в третий раз, после чего колода, составленная из трех стопок, кладется на стол так, чтобы открытая карта была внизу. Все это время фокусник ни разу не прикасается к картам, но тем не менее он мгновенно говорит, в каком месте лежит задуманная карта.

Секрет фокуса заключается в том, чтобы заметить, куда зритель положил стопку с задуманной картой— под колоду, в середину ее или наверх. Обозначим эти три положения цифрами 0 (когда стопка находится в верхней части колоды), 1 (когда стопка лежит в середине)

и 2 (когда стопка положена в самый низ). Если прочесть теперь справа налево троичное число, составленное в результате трех перекладываний, то получится число карт, лежащих в колоде поверх задуманной карты. Пусть например, стопка с задуманной картой была первый раз положена на самый верх колоды (как уже объяснялось, этому положению соответствует цифра 0), второй раз — в ее середину (1) и, наконец, последний раз — в самый низ (2). Записав эти цифры справа налево и переводя троичное число 120 в десятичную систему, мы получим число 15. Это означает, что поверх задуманной карты лежат еще пятнадцать карт, то есть искомая карта будет шестнадцатой. Разумеется, фокус нисколько не усложняется, если показывать его наоборот. Зрителю предлагается выбрать любое число от 1 до 27 и задумать какую-нибудь из 27 карт, а все дальнейшие манипуляции с колодой фокусник проделывает сам. Он трижды перекладывает стопки в точности так же, как уже объяснялось выше, после чего, отсчитав сверху выбранное зрителем число карт, протягивает ему задуманную карту.

ОТВЕТЫ

Требовалось определить, какое минимальное число гирь нужно для взвешивания любого из 27 предметов, вес каждого из которых выражается целым числом фунтов от 1 до 27. Гири разрешается класть на обе чаши весов. Оказывается, что для решения задачи достаточно трех гирь весом в 2, 6 и 18 фунтов. (Это удвоенный ряд последовательных степеней числа 3.) С помощью этих гирь вы сможете найти точный вес любого предмета, если он равен четному числу фунтов от 1 до 27. Если же вес составляет нечетную цифру, то надо определить те два четных числа, между которыми он заключен. Если, например, оказывается, что предмет весит больше 16 фунтов, но меньше 18, то отсюда сразу следует, что его вес равен 17 фунтам.

ГЛАВА 37

СЕМЬ КОРОТКИХ ЗАДАЧ

1. Путешествие вокруг Луны. Действие происходит 1984 году. К тому времени на Луне уже построена научно-исследовательская лаборатория, и обитающий на ней космонавт получил задание совершить путешествие вокруг Луны. Он должен начать свой путь с базы и, обойдя лунную поверхность по большому кругу, вернуться на базу с другой стороны. Космонавт должен передвигаться на специальной машине, у которой бак для горючего рассчитан на одну пятую всего пути вокруг Луны. Кроме того, в машине есть запломбированная канистра с горючим, объем которой равен объему бака. Эту канистру можно либо открыть и перелить ее содержимое в бак, либо, не открывая, выгрузить из машины и оставить на лунной поверхности. Таким образом, запасное горючее запрещается использовать частично.

Задача состоит в том, чтобы совершить путешествие вокруг Луны с наименьшей затратой горючего. Разрешается делать любое число подготовительных поездок в любых направлениях для заброски контейнеров с горючим в любые пункты на поверхности Луны, откуда потом их можно будет взять и использовать. Однако в конце концов космонавт должен проехать вдоль всей большой окружности, двигаясь в одном и том же направлении. Предполагается, что на базе имеется неограниченный запас горючего и что машину можно на ней заправить в любое время.

Для решения задачи удобно начертить окружность и разделить ее на двадцать равных частей, как показано на рис. 224. Горючее, израсходованное в подготовительных поездках, входит, конечно, в общий объем использованного горючего. Если, например, машина отвезла в пункт *90* один контейнер с горючим и вернулась после этого на

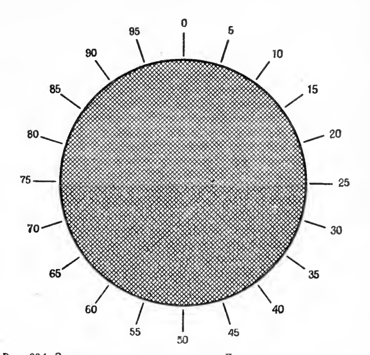


Рис. 224. Задача о путешествии вокруг Луны.

базу, то считается, что один бак горючего уже израсходован. Решая задачу «в лоб», нужно было бы сначала забросить 41 контейнер с горючим в точку *10*, а затем, оставив сорок второй контейнер в точке *15*, вернуться в точку *10*. Для всей этой процедуры понадобилось бы 84 бака с горючим: 42 бака для перевозки и 42 бака, подготовленных для окончательного путешествия. Больше горючего уже не понадобилось бы: двигаясь вперед и назад между пунктами, космонавт сумел бы объехать Луну без всяких дополнительных расходов топлива. Однако можно составить такую схему поездок, что расход горючего уменьшится более чем в два раза по сравнению с объемом восьмидесяти четырех баков.

2. Задача о буровой скважине. В одной равнинной местности отгородили прямоугольный участок и пробурили в нем нефтяную скважину. Нефть появилась в точке,

которая находилась глубоко под землей на расстоянии 2100 футов от одной из вершин прямоугольника, 18 000 футов от противоположной вершины и 6000 футов от третьей вершины. Определите расстояние от этой точки до четвертой вершины прямоугольника. Решив задачу, вы получите очень общую и полезную формулу, отличающуюся в то же время необыкновенной простотой.

3. Необычная игра в крестики и нолики. Один читатель предложил совершенно невероятный способ игры в крестики и нолики. Правила остаются старыми, с той лишь разницей, что каждый игрок, когда подходит его очередь, может по желанию поставить либо крестик, либо нолик. Победу одерживает тот, кто первым закончит ряд из трех одинаковых фигур (либо из трех крестиков, либо из трех ноликов).

Если оба противника играют рационально, то стандартная партия в крестики и нолики обычно заканчивается вничью. Если же вы будете играть по-новому, то ситуация изменится. Пусть каждый игрок избрал самую правильную стратегию. Кто из них выигрывает наверняка — первый или второй?

4. Новая монетная система. Для того чтобы набрать сумму в 99 центов, потребуется по крайней мере восемь американских монет: по одной монете в пол- и в четверть доллара, две десятицентовые монеты и четыре монеты по одному пенни. Представьте себе, что какая-нибудь новая независимая нация избрала вас своим президентом. Вы должны утвердить монетную систему, в которой наименьшей монетой является один цент. Ваша задача состоит в том, чтобы любую сумму от одного до ста центов можно было отсчитать не более чем двумя монетами и чтобы при этом число различных монет в денежной системе оказалось минимальным.

Это требование выполняется, например, в том случае, если вы отчеканите 18 монет достоинством 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ,10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 центов. Попробуйте теперь подобрать такие монеты, чтобы это число уменьшилось. Любая сумма должна быть образована либо одной монетой, либо двумя. В последнем случае обе монеты могут, конечно, иметь как разные, так и одинаковые достоинства.

5. Воспитание математнкой. — Ну, нет, — сказал както математнк своему четырнадцатнлетнему сыну, — на этой иеделе я ие собнраюсь давать тебе лншине десять долларов. Однако, если хочешь, могу предложить одно рнскованное предприятне.

Мальчик тяжело вздохнул.

— Что ты придумал на этот раз?

— У меия есть десять хрустящнх новеиькнх десятндолларовых баикнотов н десять бумажек по одному доллару; оии тоже новые и хрустят. Все этн баикноты ты можешь распределнть как угодно, ио так, чтобы получнлось два набора. Один набор положим в шляпу A, второй — в шляпу B. После этого я завяжу тебе глаза н, перемешав содержнмое виутрн каждой шляпы, положу одиу шляпу справа от камииа, а вторую слева. Ты должеи будешь взять наугад одну нз шляп н выиуть нз нее одну бумажку. Если вынешь десятку — она твоя.

— А если нет?

— Будешь без разговоров целый месяц стрнчь газон.

Мальчик согласнлся. Как ои должеи распределить по шляпам двадцать бумажек, чтобы максимальио увелнчить вероятиость вытяиуть десять долларов, и чему будет равиа эта вероятиость?

6. Еще одна задача на взвешивание. Задача о взвешнваинн 12 монет вызвала у читателей столь большой ннтерес, что я решил продолжить эту серию еще одной задачей, но иа этот раз меиее сложиой.

Из пятн даниых предметов никакие два не весят однnаково. Эти пять предметов надо расположить в ряд по мере возрастання их веса. У вас есть рычажные весы с двумя чашамн, но нет гнрь. Как решнть задачу, произведя не более семи взвешиваний?

Ясно, что для двух предметов достаточио одиого взвешиваиия. Три предмета придется взвешивать трнжды. Пускай первое взвешиванне определит, что A тяжелее, чем B. Положим на весы B н C. Еслн B окажется тяжелее, то задача будет решена с помощью двух взвешиваний; еслн же тяжелее окажется C, то потребуется третье взвешивание, с помощью которого мы сравним между собой предметы C н A. Если перед вамн четыре предмета, то можно легко обойтись пятью взвешиваниями.

Когда чнсло предметов доходит до пяти, задача пере-

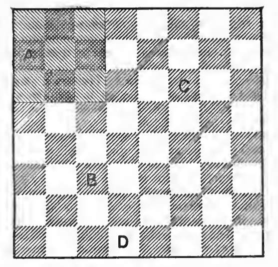


Рис. 225. Доска в задачах о ходе ферзя.

стает быть тривиальной, а с дальнейшим ростом числа взвешиваемых предметов трудиость задачи очень быстро увеличивается. Насколько мие известио, пока не существует общего метода для упорядочения n предметов с помощью наименьшего возможного числа взвешиваний.

7. Пять задач о ходе ферзя. В сотнях шахматиых задач мы сталкиваемся с перемещеиием одной шахматной фигуры по всей доске. В главе 35 кратко упоминались задачи о ходе шахматиого коня и их связь с теорией графов. Ниже дается подборка из пяти задач о ходе ферзя. Чтобы их решить, совсем ие обязательио уметь играть в шахматы. Достаточио зиать, что ферзь перемещается на любое число клеток в любом иаправлеиии (параллельно сторонам доски или по диагонали). Задачи приводятся по мере возрастания их трудиости.

1. Ферзь занимает квадрат A (рис. 225). Надо сделать четыре хода, причем так, чтобы ферзь побывал в каждой из девяти темиых клеток, в левом верхием углу доски.

2. Поставив ферзя на поле D (обычио в иачале игры белый ферзь стоит имеиио на этом поле), пройдите им за пять ходов максимальное число клеток. Остаиавливаться

дважды в одной и той же клетке запрещается; кроме того, ферзь ни в одной точке не должен пересекать свой путь. Считается, что в каждой клетке траектория проходит через центр клетки.

3. Ферзь стоит в квадрате *B*. Нужио с помощью 15 ходов обойти все квадраты доски и закончить траекторию в квадрате, обозначенном буквой *C*. Ни один квадрат нельзя проходить дважды.

4. Начав с угловой клетки, обойдите ферзем все клетки доски за 14 ходов, а последним ходом вернитесь в исходиое положение. При этом некоторые клетки можно проходить больше одного раза. В 1867 году эту задачу «о кругосветном путешествии ферзя» впервые опубликовал Сэм Лойд, считавший ее одной из своих лучших головоломок. В рассмотренной задаче траектория ферзя может иачинаться и кончаться в одной и той же или же на двух соседних клетках, но и в том и в другом случае задача решается самое малое в 14 ходов.

5. Найдите такую же траекторию, состоящую из 12 ходов, на доске размером 7×7. Ферзь должен вернуться в иачальный квадрат, побывав по крайней мере один раз в каждом квадрате доски. Как и в предыдущей задаче, одиу и ту же клетку разрешается проходить иесколько раз.

ОТВЕТЫ

1. Для путешествия вокруг Луиы достаточно 23 баков топлива. Ниже приводится схема поездок (рис. 224):

1. Пять контейнеров перевозятся в пункт *90* за пять поездок, после чего машина возвращается на базу (израсходовано 5 баков горючего).

2. Переправив в пункт *85* один контейиер, машииа возвращается в пункт *90* (израсходован 1 бак).

3. Одии коитейнер перевозится в пуикт *80*, а машииа возвращается в пункт *90* (израсходоваи 1 бак).

4. Одии коитейнер перевозится в пуикт *80*, после чего машииа возвращается в пункт *85* и, взяв там коитейнер, переправляет его в пункт *80* (израсходоваи 1 бак).

5. Переправив одии контейнер в пуикт *70*, машииа возвращается в пункт *90* (израсходован 1 бак).

6. Возвращеиие иа базу (израсходован 1 бак).

На этом все подготовительные поездки коичаются. Израсходовано десять баков горючего, в результате чего

в пунктах *70* и *90* осталось по одному полному контейнеру.

7. Переправив в пункт *5* один контейнер, машина возвращается на базу (израсходовано полбака).

8. Сделав четыре поездки, машина завозит четыре контейнера в пункт *10* и возвращается на базу (израсходовано 4 бака).

9. Один контейнер с базы отвозится в пункт *10*, затем, вернувшись в пункт *5*, машина берет там один контейнер и переправляет его в пункт *10* (израсходован 1 бак).

10. Два контейнера за две поездки отвозятся в пункт *20*, а машина возвращается в пункт *10* (израсходовано 2 бака).

11. Переправив один контейнер в пункт *25*, машина возвращается в пункт *20* (израсходован 1 бак).

12. Один контейнер перевозится в пункт *30*, затем машина возвращается в пункт *25* и, взяв там один контейнер, возвращается с ним в пункт *30* (израсходован 1 бак).

13. Машина переезжает в пункт *70* (израсходовано 2 бака).

14. Машина переезжает в пункт *90* (израсходован 1 бак).

15. Машина возвращается из пункта *90* на базу (израсходовано полбака).

2. Нефть найдена под землей в точке, которая расположена на следующих расстояниях от вершин прямоугольного участка земли: 21 000 футов от одной вершины, 18 000 футов от противоположной вершины и 6000 футов от третьей вершины. На каком расстоянии от четвертой вершины прямоугольника находится эта точка?

Рассмотрим точку p на верхнем чертеже рис. 226. Начертив две перпендикулярные пунктирные прямые, мы получим набор прямоугольных треугольников. Поскольку $e^2 = a^2 + c^2$, а $g^2 = b^2 + d^2$, мы можем записать следующее равенство:

$$e^2 + g^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2.$$

Из того же рисунка видно, что $f^2 = a^2 + d^2$ и $h^2 = b^2 + c^2$, следовательно,

$$f^2 + h^2 = a^2 + d^2 + b^2 + c^2.$$

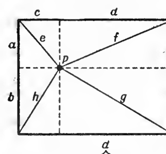
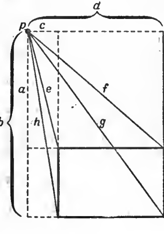


Рис. 226. К решению задачи о бурении нефтяной скважины.



Если в двух равенствах правые части равны, то равны и левые части, то есть

$$e^2 + g^2 = f^2 + h^2.$$

Точно такой же анализ можно провести для нижней схемы на рис. 226, на которой точка p располагается вне прямоугольника. Если представить себе, что точка p на обоих чертежах находится под землей, то стороны всех прямоугольников увеличатся, но выделенные соотношения останутся в силе. Иными словами, где бы в пространстве ни располагалась точка p (выше или ниже плоскости треугольника или даже на его ребре или в его вершине), сумма квадратов расстояний от этой точки до двух противолежащих вершин прямоугольника будет равна сумме квадратов ее расстояний до двух других вершин. С помощью этой простой формулы мы получим, что расстояние до четвертой вершины равно 27 000 футов.

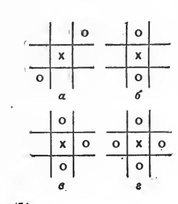


Рис. 227. Игра в крестики и нолики по необычным правилам.

3. Если при игре в крестики и нолики оба противника имеют право ставить как крестики, так и нолики, то начинающий игру всегда одерживает победу, если он первым же ходом занимает центральную ячейку. Предположим, он рисует в ней крестик. Тогда второй игрок имеет возможность занять либо угловую клетку, либо одну из четырех клеток на сторонах квадрата.

Пусть он выбрал угловую ячейку и, чтобы избежать немедленного проигрыша на следующем же ходу, поставил в ней 0. В ответ на это первый игрок рисует нолик в противоположной вершине, как показано на рис. 227, а второй игрок не может предотвратить своего поражения и следующим ходом противник его обыгрывает.

Пусть второй игрок занял не угловую, а одну из боковых клеток. Он опять должен поставить 0, чтобы не проиграть сразу. Ответный ход противника изображен на рис. 227, *б*. Второй игрок вынужден пойти так, как показано на рис. 227, *в*, после чего первый игрок может поставить как крестик, так и нолик (рис. 227, *г*) и следующим же ходом одерживает победу независимо от хода первого игрока.

4. Шестнадцати монет разного достоинства вполне достаточно для того, чтобы любую сумму от 1 до 100 центов можно было бы представить не более чем двумя монетами. Отчеканить надо монеты достоинством 1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49, 50 центов *. Не доказано, что задачу нельзя решить с меньшим числом монет.

5. Чтобы максимально увеличить вероятность вытащить десятидолларовую купюру, мальчик должен положить ее в одну из шляп, а остальные 19 купюр (9 десятидолларовых и 10 по одному доллару) бросить во вторую шляпу. Вероятность наткнуться на шляпу с одной десятидолларовой бумажкой равна $1/2$, а вероятность извлечь из этой шляпы десять доларов равна 1 (то есть 10 долларов лежат в ней наверняка). Обратимся ко второй шляпе. Если мальчик будет вынимать деньги из нее, то он все же сможет получить свои 10 долларов с вероятностью $9/19$.

* Решение взято из книги Sprague, Unterhaltsame Mathematik, Braunschweig, 1961.

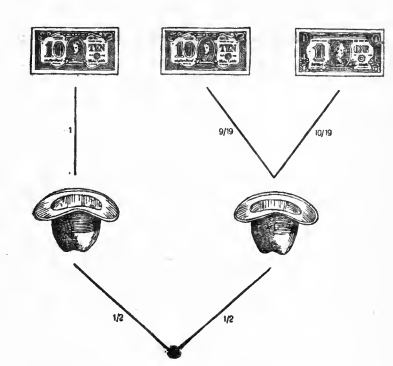


Рис. 228. К решению задачи «Воспитание математикой».

Схема этой простой вероятностной задачи приводится на рис. 228. Вероятность того, что мальчик вынет десятидолларовую купюру из шляпы *A*, равна $^1/_2 \times 1 = ^1/_2$. Вероятность того, что он вынет такую же купюру из шляпы *B*, составляет $^1/_2 \times ^9/_{19} = ^9/_{38}$. Сумма двух вычисленных вероятностей, равная $^{14}/_{19}$ (что составляет почти $^3/_4$), и представляет собой полную вероятность того, что мальчик вытащит 10 долларов.

6. Пять предметов можно расположить по порядку возрастания их веса с помощью 7 взвешиваний, произведенных на рычажных весах, по следующей схеме:

1) взвешиваем предметы *A* и *B*. Пусть предмет *B* тяжелее, чем *A*;

2) взвешиваем предметы *C* и *D*. Пусть предмет *D* тяжелее, чем *C*;

3) кладем на весы предметы *B* и *D*. Предположим,

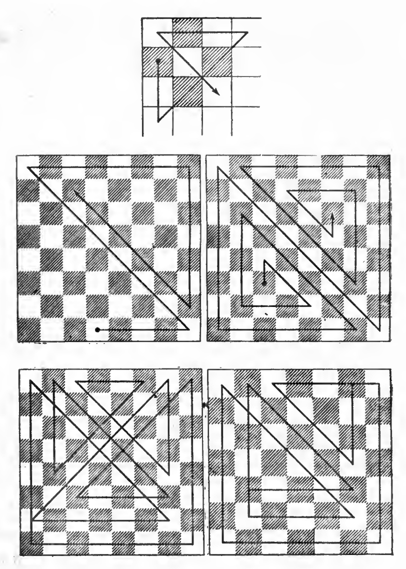


Рис. 229. Решение задач о ходе ферзя.

что предмет D оказался тяжелее предмета B. Мы получилн неравеиство $D > B > C$;

4) сравниваем веса предметов E и B;

5) если предмет E тяжелее предмета B, кладем иа весы E и D. Еслн E окажется легче, сравннваем между собой веса E и A. В обоих случаях мы получаем возможиость определить место E в ряду из четырех предметов. Предположнм, что этот ряд имеет внд $D > B > E > A$. Операция 2 позволяет нам определнть, как соотносятся между собой веса C и D, поэтому достаточно определить место C средн трех оставшнхся предметов (B, E, A). Для этого всегда достаточно двух взвешиваний. В нашем случае иадо:

6) сначала сравннть веса C н E, а затем

7) положнть на весы предметы B и C, если C тяжелее, чем E, или же предметы A и C, если C окажется легче, чем E.

В общем внде эта задача обсуждается в майском номере журнала *The American Mathematical Monthly* за 1959 год (стр. 387—389).

7. Решення пятн задач о ходе ферзя изображены на рнс. 229. Для четвертой н пятой задач существуют н другие решення, но нн одно нз инх не состоит нз меньшего числа ходов. Еслн, решая вторую задачу, вы сначала передвинули ферзя в нижиий правый угол, затем в верхиий правый угол, затем вдоль главиой диагоиали в иижиий левый угол, затем в верхиий левый угол н, иаконец, иа семь квадратов вправо, то полученный путь будет почти (но ие в точностн) равен по длние пути, изображенному на рнс. 229.

ГЛАВА 38

ИГРА «ЖИЗНЬ»

Что наша «Жизнь»? Игра!

Большая часть работ Джона Хортона Конуэя отиосится к области чнстой математнки. Например, в 1967 году он открыл иовую группу (ее иногда называют «со-

звездием Коиуэя»), включавшую в себя в качестве подгрупп все известные к тому времеии «спорадические» группы, кроме двух («спорадическими» эти группы были иазваиы потому, что оии ие укладывались ии в какую классификацию).

Открытие Коиуэя имело первостепеиное зиачеиие ие только для теории групп, ио и для теории чисел. Оио тесио связаио с другим, более раииим открытием Джоиа Лича, обиаружившего иеобычайно плотиую упаковку едиииичых сфер в двадцатичетырехмериом простраистве. Хотя каждая сфера в этой упаковке касается 196 560 других, все же, как заметил Коиуэй, между сферами «остается еще много места». Помимо серьезных исследоваиий, Коиуэй увлечеи заиимательиой математикой. В этой области ему прииадлежит иемало работ, одиако публикует ои свои «заиимательные» результаты чрезвычайио редко. В сеитябрьском иомере журиала *Scientific American* за 1966 год была помещеиа статья Коиуэя о «стегаиом одеяле миссис Перкиис», посвящеииая задачам о разрезаиии квадрата, а в июле 1967 года иа страиицах того же журиала появилась топологическая игра «Спрут», которую придумали Коиуэй и М. С. Патерсои. Имя Коиуэя иеодиократио встречалось читателям раздела «Математические игры» и раиее.

Эта глава посвящена последиему детищу Коиуэя — увлекательиой игре, которую сам Коиуэй иазвал «Жизнь». Для игры «Жизнь» вам ие поиадобится партиер — в иее можио играть одиому. Возиикающие в процессе игры ситуации очеиь похожи иа реальиые процессы, происходящие при зарождеиии, развитии и гибели колоиии живых оргаиизмов. По этой причиие «Жизнь» можио отиести к быстро развивающейся в иаши дии категории игр, имитирующих процессы, происходящие в живой природе. Для игры «Жизнь» вам поиадобится большая доска, разграфлеииая иа клетки, и миого плоских фишек двух цветов (иапример, просто иесколько иаборов обычных шашек иебольшого диаметра или пуговиц двух цветов). Можно также воспользоваться доской для игры в го, ио тогда вам придется раздобыть малеиькие плоские шашки, которые умещаются в ячейках этой доски (обычиые камии для игры в го ие годятся потому, что оии ие плоские). Можно рисовать ходы иа бумаге,

но значительно проще, особенно для начинающих, играть, переставляя фишки или шашки на доске.

Основная идея состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения фишек (организмов), расставленных по одной клетке, проследить за эволюцией исходной позиции под действием «генетических законов» Конуэя, которые управляют рождением, гибелью и выживанием фишек. Конуэй тщательно подбирал свои правила и долго проверял их «на практике», добиваясь, чтобы они по возможности удовлетворяли трем условиям:

1. Не должно быть ни одной исходной конфигурации, для которой существовало бы простое доказательство возможности неограниченного роста популяции.

2. В то же время должны существовать такие начальные конфигурации, которые заведомо обладают способностью беспредельно развиваться.

3. Должны существовать простые начальные конфигурации, которые в течение значительного промежутка времени растут, претерпевают разнообразные изменения и заканчивают свою эволюцию одним из следующих трех способов: полностью исчезают (либо из-за перенаселенности, то есть слишком большой плотности фишек, либо наоборот, из-за разреженности фишек, образующих конфигурацию); переходят в устойчивую конфигурацию и перестают изменяться вообще или же, наконец, выходят на колебательный режим, то есть бесконечный цикл превращений с определенным периодом.

Короче говоря, правила должны быть такими, чтобы поведение популяции было непредсказуемым.

Генетические законы Конуэя удивительно просты. Прежде чем мы их сформулируем, обратим внимание на то, что каждую клетку доски (доска считается бесконечной) окружают восемь соседних клеток: четыре имеют с ней общие стороны, четыре другие — общие вершины. Правила игры (генетические законы) сводятся к следующему:

1. Выживание. Каждая фишка, имеющая две или три соседние фишки, выживает и переходит в следующее поколение.

2. Гибель. Каждая фишка, у которой больше трех соседей, погибает, то есть снимается с доски из-за перенаселенности. Каждая фишка, вокруг которой свободны

все соседние клетки или же занята всего одна клетка, погибает от одиночества.

3. Рождение. Если число фишек, с которыми граничит какая-нибудь пустая клетка, в точности равно трем (не больше и не меньше), то на этой клетке происходит рождение нового «организма», то есть следующим ходом на нее ставится одна фишка.

Важно понять, что гибель и рождение всех «организмов» происходят одновременно. Вместе взятые, они образуют одно поколение или, как мы будем говорить, один «ход» в эволюции начальной конфигурации. Ходы Конуэй рекомендует делать следующим образом:

1) начать с конфигурации, целиком состоящей из черных фишек;

2) определить, какие фишки должны погибнуть, и положить на каждую из обреченных фишек по одной черной фишке;

3) найти все свободные клетки, на которых должен произойти акт рождения, и на каждую из них поставить по одной фишке белого цвета;

4) выполнив все эти указания, еще раз внимательно проверить, не сделано ли каких-нибудь ошибок, затем снять с доски все погибшие фишки (то есть столбики из двух фишек), а всех новорожденных (белые фишки) заменить черными фишками.

Проделав все операции, вы получите первое поколение в эволюции первоначальной конфигурации. Аналогичным образом получаются и все последующие поколения. Теперь уже ясно, для чего нужны фишки двух цветов: поскольку рождение и гибель «организмов» происходят одновременно, новорожденные фишки никак не влияют на гибель и рождение остальных фишек, и поэтому, проверяя новую конфигурацию, необходимо уметь отличать их от фишек, перешедших из предыдущего поколения. Допустить ошибку, в особенности если вы играете впервые, очень легко. Со временем вы будете делать все меньше и меньше ошибок, однако даже опытные игроки должны очень внимательно проверять каждое новое поколение перед тем, как снимать с доски погибшие фишки и заменять черными фишками новорожденные белые.

Начав игру, вы сразу заметите, что популяция непрестанно претерпевает необычные, нередко очень краси-

вые и всегда неожиданные изменения. Иногда первоначальная колония организмов постепенно вымирает, то есть все фишки исчезают, однако произойти это может не сразу, а лишь после того, как сменится очень много поколений. В большинстве своем исходные конфигурации либо переходят в устойчивые (последние Конуэй называет «любителями спокойной жизни») и перестают изменяться, либо навсегда переходят в колебательный режим. Конфигурации, не обладавшие в начале игры симметрией, обнаруживают тенденцию к переходу в симметричные формы. Обретенные свойства симметрии в процессе дальнейшей эволюции не утрачиваются, симметрия конфигурации может лишь обогащаться.

Конуэй высказал гипотезу, согласно которой не существует ни одной начальной конфигурации, способной беспредельно расти. Иначе говоря, любая конфигурация, состоящая из конечного числа фишек, не может перейти конфигурацию, в которой число фишек превосходило бы некий конечный верхний предел. Это, наверное, самая глубокая и самая сложная задача, возникающая в игре Конуэя. Когда описание игры появилось в октябрьском номере журнала *Scientific American* за 1970 год, Конуэй предлагал премию тому, кто до конца года первым докажет или опровергнет его гипотезу. Опровергнуть гипотезу Конуэя можно было бы, например, построив конфигурацию, к которой, следуя правилам игры, все время приходилось бы добавлять новые фишки, например «ружье» (конфигурация, которая через определенное число ходов «выстреливает»), движущиеся фигуры вроде «планера», о котором мы еще будем говорить, или «паровоз, пускающий дым из трубы» (движущаяся конфигурация, оставляющая за собой «клубы дыма»).

Рассмотрим, что происходит с некоторыми простыми конфигурациями.

Одна фишка, а также любая пара фишек, где бы они ни стояли, очевидно, погибают после первого же хода. Исходная конфигурация из трех фишек (будем называть ее триплетом), как правило, погибает. Выживает триплет лишь в том случае, если по крайней мере одна фишка граничит с двумя занятыми клетками. Пять триплетов, не погибающих на первом же ходу, изображены на рис. 230. (Как расположены триплеты на плоскости — прямо, «вверх ногами» или косо, не суще-

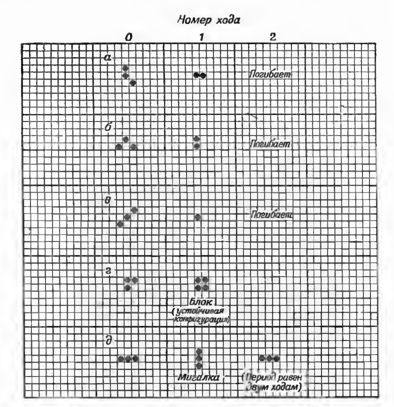


Рис. 230. Эволюция пяти триплетов.

ственно.) Первые три конфигурации (*а*, *б*, *в*) на втором ходу погибают. Относительно конфигурации *в* заметим, что любой диагональный ряд фишек, каким бы длинным он ни был, с каждым ходом теряет стоящие на его концах фишки и в конце концов совсем исчезает. Скорость, с которой шахматный король перемещается по доске в любом направлении, Конуэй называет «скоростью света». (Причины этого станут понятны в дальнейшем.) Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что диагональный ряд фишек распадается с концов со скоростью света. Конфигурация *г* (рис. 230) на втором ходу переходит в устойчивую конфигурацию —

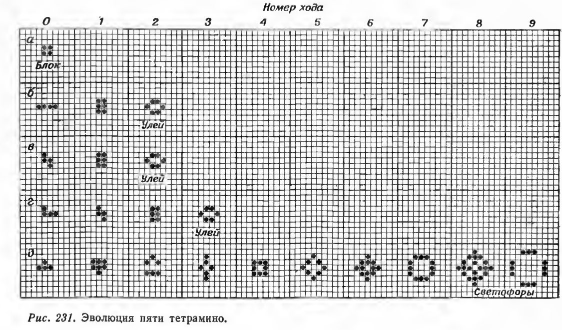


Рис. 231. Эволюция пяти тетрамино.

«блок» размером 2×2. Конфигурация *д* служит простейшим примером так называемых «флип-флопов» (кувыркающихся конфигураций, возвращающихся в исходное состояние через каждые два хода). Она попеременно превращается то в вертикальный, то в горизонтальный ряд из трех фишек. Конуэй называет этот триплет «мигалкой».

На рис. 231 изображена эволюция пяти тетрамино (четыре клетки, из которых состоит элемент тетрамино, связаны между собой ходом ладьи). Как мы уже видели, квадрат *а* относится к категории «любителей спокойной жизни». Конфигурации *б* и *в* после второго хода переходят в устойчивую конфигурацию, называемую «ульем». «Ульи» в игре возникают часто. Тетрамино, обозначенное буквой *г*, также превращается в улей, но на третьем ходу. Особый интерес вызывает тетрамино *д*, которое после девятого хода распадается на четыре отдельные мигалки (вся конфигурация носит название «навигационные огни»). «Навигационные огни» относятся к разряду флип-флопов и возникают довольно часто. На рис. 232 показаны двенадцать наиболее часто встречающихся конфигураций из числа «любителей спокойной жизни» (то есть устойчивых конфигураций).

Предоставляем читателю самостоятельно поэкспериментировать на досуге с двенадцатью фигурами пентамино (фигуры, состоящие из пяти клеток, связанных между собой так, что их можно обойти ходом ладьи) и посмотреть, во что они превращаются. Оказывается, что пять из них на пятом ходу погибают, две быстро переходят в устойчивые конфигурации из семи клеток, а четыре после небольшого числа ходов превращаются в «навигационные огни». Единственным исключением является элемент пентамино, имеющий форму буквы *r* (на рис. 233 эта конфигурация обозначена буквой *а*), превращения которого заканчиваются не столь быстро (превращения конфигурации считаются исчерпанными, если та исчезает, переходит в устойчивую конфигурацию или начинает периодически пульсировать). Конуэй проследил развитие *r*-образного пентамино вплоть до четыреста шестидесятого хода, после которого конфигурация распалась на множество планеров. Конуэй пишет, что «от фигуры осталось множество мертвых (не изменяющихся) обломков и лишь несколько областей, в

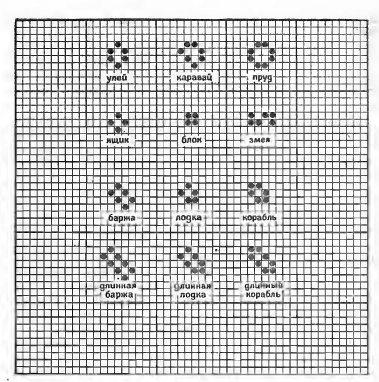


Рис. 232. Наиболее часто встречающиеся устойчивые конфигурации.

которых все еще теплилась жизнь, поэтому отнюдь не очевидно, что процесс эволюции должен происходить бесконечно долго. После сорока восьми ходов r-образное пентамино превратилось в конфигурацию, левая часть которой состоит из семи фишек, а правая — из фишек, заполняющих две симметричные области. Если бы левой части не было, то эти области развивались бы в «пасеку» с четырьмя ульями и «навигационные огни». Возмущение, вносимое левой частью, приводит к тому, что «пасека» быстро вгрызается в «навигационные огни» и образующие их четыре «мигалки» гаснут одна за другой, оставляя после себя на доске «нечто бесформенное».

Изучая эволюцию долгожителей наподобие r-пентамино, Конуэй иногда пользуется счетной машиной,

устройство которой позволяет выводить выходные данные на экран и таким образом наблюдать все изменения, происходящие на игровом поле. Без программы, которую написали М. Дж. Т. Гай и С. Р. Бурн, многие особенности игры были бы обнаружены лишь с большим трудом. В качестве простых упражнений я предлагаю читателям проследить до конца эволюцию шести следующих фигур, изображенных на рис. 233: «латинского креста» (*б*), буквы Н (*в*), «вертушки» (*г*), «бакена» (*д*), «часов» (*е*) и «жабы» (*ж*). Если перекладину в букве Н поднять на одну клетку вверх, чтобы получились «ворота» (или, как называет эту конфигурацию Конуэй, прописная буква «пи»), то произойдут совершенно неожиданные изменения. В противоположность букве Н, эволюция которой заканчивается быстро, «ворота» оказываются весьма долгоживущей конфигурацией. Лишь после 173 ходов она распадается на 5 «мигалок», 6 «блоков» и 2 «пруда». Конуэй проследил эволюцию всех элементов гексамино и всех элементов гептамино, за исключением семи.

Одним из самых замечательных открытий Конуэя следует считать конфигурацию из 5 фишек — «планер», изображенный на рис. 234. После второго хода «планер»

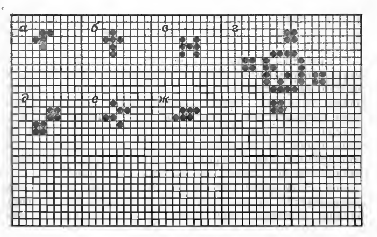


Рис. 233. **Пентамино в форме буквы r (*а*) и шесть задач для читателей.**

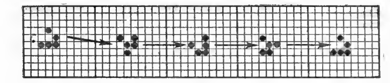


Рис. 234. «Планер».

неменого сдвигается и отражается относительно диагонали. В геометрии такой тип симметрии называется скользящей симметрией, отсюда и название фигуры *. В результате двух последующих ходов «планер» «выходит из пике», ложится на прежний курс и сдвигается на одну клетку вправо и на одну клетку вниз относительно начальной позиции. Выше уже писалось, что скорость шахматного короля в «Жизни» принято называть скоростью света. Выбор Конуэя пал именно на этот термин из-за того, что в изобретенной им игре бóльшие скорости просто не достигаются. Ни одна конфигурация не воспроизводит себя достаточно быстро, чтобы двигаться с такой скоростью. Конуэй доказал, что максимальная скорость на диагонали составляет одну четверть скорости света. Поскольку «планер» переходит сам в себя после четырех ходов и при этом опускается на одну клетку по диагонали, то говорят, что он скользит по полю со скоростью, равной одной четвертой скорости света.

Конуэй также показал, что скорость любой конечной фигуры, перемещающейся по вертикали или по горизонтали на свободные клетки, не может превышать половину скорости света. Попробуйте самостоятельно найти сравнительно простую фигуру, которая движется с такой скоростью. Напомним, что скорость движения равна дроби, в числителе которой стоит число ходов, необходимых для воспроизведения фигуры, а в знаменателе — число клеток, на которое она при этом смещается. Если какая-нибудь фигура каждые четыре хода передвигается на две клетки по вертикали или по горизонтали, повторяя свою форму и ориентацию, то ско-

* По-английски планер называется glider, от glide — скользить. — *Прим. перев.*

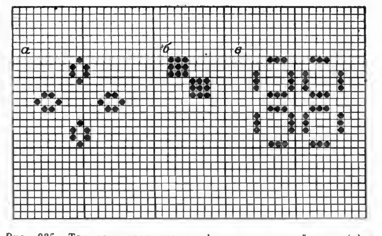


Рис. 235. Три замечательные конфигурации — устойчивая (*а*) и периодически пульсирующие (*б* и *в*).

рость такой фигуры будет равна половине скорости света. Надо сказать, что поиски перемещающихся по доске фигур — дело чрезвычайно сложное. Конуэю известны всего четыре такие конфигурации, которые он называет «космическими кораблями». В их число входит уже известный вам «планер»; найдите остальные три. («Планер» считается космическим кораблем «легчайшего веса», потому что все остальные корабли состоят из большего числа фишек.) Три более тяжелых космических корабля Конуэй просил держать в секрете от читателей. Попробуйте также отыскать еще какие-нибудь конфигурации, которые, периодически повторяясь, перемещаются по доске в любых направлениях и с любыми сколь угодно маленькими скоростями.

Три изящные фигуры, изображенные на рис. 235, были открыты Конуэем и его сотрудниками. «Пасека» (*а*) является устойчивой конфигурацией, в которую после 14 ходов переходит горизонтальный ряд из 7 фишек. Квадрат размером 5×5 после первого же хода переходит в конфигурацию, которая возникает лишь на четвертом этапе эволюции семиклеточного ряда. Поэтому квадрат 5×5 становится «пасекой» после 11 ходов. «Восьмерка» (*б*) — это периодически восстанавливающая себя конфигурация, открытие которой принадле-

жит Нортоиу. Оиа ие только по форме иапоминает восьмерку, но и имеет период, равиый восьми. Конфигурация, изображеииая на рис. 235, *в*, изывается «пульсар СР 48-56-72». Она также периодически восстаиавливает себя через каждые три хода. Состояиие пульсара, изображеииое иа рисуике, образоваио 48 фишками; иа втором этапе число фишек возрастает до 56, а иа третьем — до 72, после чего пульсар сиова возвращается в исходиое состояиие, а число фишек поиижается до 48. Пульсар образуется после 32 ходов из элемеита гептамиио, имеющего вид растяиутой буквы П: горизоитальиого ряда из пяти фишек, у которого под первой и последией фишкой располагается еще по одиой фишке.

Конуэй исследовал эволюцию всех горизоитальиых рядов из n фишек вплоть до $n = 20$. Мы уже зиаем, что происходит при $n \leqslant 4$. Пятиклеточиый ряд переходит в «иавигациоииые огии», шестиклеточиый исчезает, из семиклеточиого получается «пасека», из восьмиклеточиого — четыре «улья» и четыре «блока», девятиклеточиый ряд превращается в два комплекта, «навигациоииых огией», а ряд, состоящий из десяти фишек, переходик в «пеитадекатлои» — периодически воспроизводящую себя коифигурацию с периодом, равиым пятиадцати. Ряд из одиииадцати фишек эволюциоиирует, превращаясь в две «мигалки»; двеиадцатиклеточиый ряд переходит в два «улья», трииадцатиклеточный — в две «мигалки». Если ряд состоит из 14 или 15 фишек, то он полиостью исчезает, а если фишек 16, то получается большой иабор «иавигационных огией», состоящий из восьми «мигалок». Эволюция семиадцатиклеточиого ряда закаичивается четырьмя «блоками»; ряды, состоящие из 18 или 19 фишек, полиостью исчезают с доски, а эволюция двадцатиклеточиого ряда завершается двумя «блоками».

Конуэй также исследовал эволюцию рядов, образоваииых пятиклеточными группами, отделеииыми друг от друга одиой свободиой клеткой. Ряд 5-5 * после двадцать первого хода превращается в «пульсар СР 48-56-72». Ряд 5-5-5 переходит в четыре «блока» и четыре «мигалки»; в результате эволюции ряда 5-5-5-5

* То есть ряд, состоящий из двух пятиклеточных групп, разделенных одиой пустой клеткой. — *Прим. перев.*

получаются четыре «пасеки» и четыре «мигалки»; ряд 5-5-5-5-5 заканчивает свои превращения «эффектно разбросанными» по доске восемью «планерами» и восемью «мигалками». Затем планеры попарно сталкиваются и, разрушаясь, превращаются в восемь «блоков». Ряд, состоящий из шести групп по пяти клеток в каждой (5-5-5-5-5-5), превращается в четыре «мигалки», а эволюция следующего ряда 5-5-5-5-5-5-5, по мнению Конуэя, представляет «замечательное зрелище, если наблюдать ее на экране вычислительной машины». Эволюция этого ряда не была прослежена до конца.

Игра Конуэя «Жизнь» вызвала огромный интерес у ученых, занимающихся разработкой проблем, связанных с использованием ЭВМ. Автор считает поэтому целесообразным остановиться на некоторых основных фактах развития «теории клеточных автоматов» — области науки, занимающейся изучением игр, аналогичных конуэевской «Жизни».

Все началось с 1950 года, когда Джон фон Нейман поставил перед собой задачу доказать возможность существования самовоспроизводящихся автоматов. Если такую машину снабдить надлежащими инструкциями, она построит точную копию самой себя. В свою очередь две машины («мама» и «дочь») смогут построить еще две; четыре машины построят восемь и т. д. Фон Нейман впервые доказал возможность существования таких машин с помощью «кинематических» моделей машины, способной передвигаться по складу запасных частей, отбирать необходимые детали и собирать новые машины, как две капли воды похожие на нее. Позднее, воспользовавшись идеей, высказанной его другом Станиславом Уламом, фон Нейман дал более изящное и абстрактное доказательство возможности существования самовоспроизводящихся машин.

Новое доказательство фон Неймана существенно использовало понятие «однородного клеточного пространства», эквивалентного бесконечной шахматной доске. Каждая клетка такого пространства может находиться в любом, но конечном числе «состояний», в том числе в состоянии «покоя» (называемом также пустым, или нулевым, состоянием). На состояние любой клетки оказывает влияние конечное число соседних клеток. Во времени состояния пространства изменяются дискретно,

в соответствнн с «правилами перехода», которые необходнмо прнменять одновремеино ко всем клеткам. Клетки соответствуют основным частям автомата с коиечным чнслом состояиий, а конфнгурацня из «жнвых» клеток — идеалнзнрованиой моделн автомата. Именно в таком клеточном пространстве н развертывается действие прндуманной Конуэем нгры «Жнзнь». Соседннмн для каждой клеткн в «Жнзнн» счнтаются восемь непосредственно окружающнх ее клеток. Клетка может находнться в двух состояннях (лнбо на ней стонт фншка, лнбо клетка пуста). Правнла перехода определяются генетнческнми законами Конуэя (рожденне, гибель н выживание). Фон Нейман, прнменяя правила перехода к простраиству, каждая клетка (нлн ячейка) которого могла иаходнться в 29 состояннях н имела четыре соседние клеткн (примыкающне к данной по вертнкалн и горизонталн), доказал существование самовоспроизводящейся конфнгурации, состоящей прнмерно нз 200 000 клеток.

Прнчнна столь чудовищных размеров конфнгурацни объяснялась тем, что фон Нейман намеревался прнменить свое доказательство к реальным автоматам н специально подобрал клеточное простраиство, способное имитнровать машнну Тьюрннга — ндеальный автомат, названный в честь нзобретателя, англнйского математнка А. М. Тьюрннга, н способный пронзводнть любые вычнслення. «Погрузив» унивepсальную машнну Тьюринга в созданную нм конфнгурацню, фои Нейман получнл возможность создать «уииверсальный конструктор», способный постронть любую конфнгурацию в пустых клетках пространства, в том чнсле н точную копню самого себя. За время, прошедшее после смерти фон Неймана (последовавшей в 1957 году), предложенное им доказательство существования самовоспронзводящейся снстемы (речь ндет нменно о «чнстом» доказательстве существовання, а не о построении используемой в доказательстве фои Неймаиа конфнгурацнн) удалось зиачнтельно упростить. Рекорд по простоте установнло доказательство, иайдениое выпускником инжeнериого факультета Массачусетского техиологического иистнтута Эдвином Р. Бэнксом. В ием используются ячейки, которые могут находиться лишь в 4 состояиях.

Самовоспроизведения в тривиальном смысле — без использования конфигураций, включающих в себя машину Тьюринга, — добиться легко. Удивительно простой пример «тривиальной» самовоспроизводящейся системы предложил около 10 лет назад Эдвард Фредкин. В этой системе ячейки могут находиться лишь в двух состояниях, каждая из них, как и в примере фон Неймана, имеет четырех соседей, а правила перехода сводятся к следующим. Каждая клетка, имеющая в момент времени t четное число (0, 2, 4, ...) живых соседей, в момент времени $t+1$ становится пустой (то есть переходит в нулевое состояние или, если она уже находилась в нулевом состоянии, остается в нем). Каждая клетка, имеющая в момент времени t нечетное число (1, 3, ...) соседей, в момент времени $t+1$ становится живой (то есть переходит в ненулевое состояние или сохраняет его, если она уже в нем находилась). Нетрудно показать, что через 2^n ходов (число n зависит от выбора конфигурации) любая конфигурация живых клеток воспроизведет себя четыре раза: одна копия расположится справа, другая — слева, третья — сверху, четвертая — снизу от того (уже пустого) места, где находилась начальная конфигурация. Четыре копии заимствуют 2^n клеток у исчезнувшего организма. Новая конфигурация через 2^n шагов снова размножится (с коэффициентом воспроизводства, равным 4) и т. д. Число копий увеличивается в геометрической прогрессии 1, 4, 16, 64 ... На рис. 236 показаны два цикла размножения тримино в форме прямого угла. Терри Виноград в 1967 году обобщил правила Фредкина на любое число соседей, произвольную схему примыкания клеток и размерность (результаты Винограда относятся к клеткам, число состояний которых просто).

Множество автоматов такого рода, отличающихся друг от друга схемой примыкания соседних клеток, числом состояний и правилами перехода, исследовал С. Улам. В опубликованной им (совместно с Робертом Г. Шрандтом) в 1967 году статье «О рекурсивно определенных геометрических объектах и схемах роста» Улам описал несколько игр. На рис. 237 показано 45-е поколение организма, родившегося из одной-единственной фишки, стоявшей на центральной клетке. Как и в игре Конуэя, клетки в игре Улама могут находиться

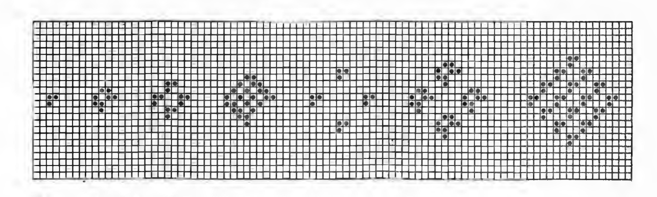


Рис. 236. Размножение тримино.

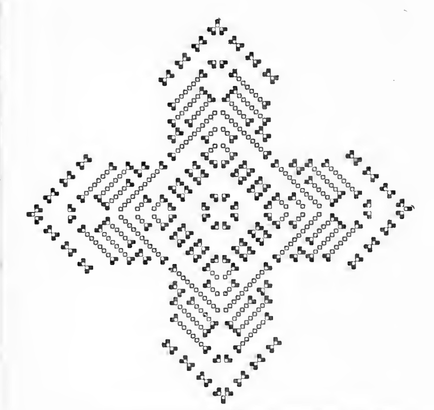


Рис. 237. Конфигурация в клеточной игре, предложенной С. Уламом, которая возникает в 45 поколении.

в двух состояииях, ио соседиими считаются клетки, примыкающие к даниой лишь по вертикали и по горизоитали, ио не по диагоиали («соседи» в смысле фои Неймана). Рождение фишки происходит на клетке, имеющей одиого и только одного соседа, а все клетки n-го поколеиия погибают после рождения $(n+2)$-го поколеиия. Иначе говоря, на любом этапе эволюции выживают лишь два последних поколения. На рис. 237 черными изображены иоворождеиные клетки (их 444) (белые клетки предыдущего поколеиия — их 404 — исчезнут на следующем ходу). Обратите внимание на характерную деталь, которую Улам назвал «обглодаииой костью». Улам про-

водил эксперименты и с такими играми, в которых две конфигурации могли расти до тех пор, пока они не сталкивались. В следующей за столкновением «битве» одной стороне иногда удавалось одержать верх над другой, иногда обе армии исчезали. Улам рассмотрел также игры на трехмерных досках — кубических «паркетах», заполняющих все пространство. Основные результаты Улама собраны в его статьях, опубликованных в сборнике «Очерки теории клеточных автоматов» *.

Аналогичные игры можно вести и на бесконечных досках, клетки которых имеют форму равносторонних треугольников и правильных шестиугольников. Несмотря на сильное внешнее отличие, по существу эти игры не вносят ничего нового, и с помощью подходящего определения «соседних» клеток их всегда можно свести к эквивалентным играм на обычной доске с клетками в форме квадратов. Соседними могут быть не только клетки, имеющие общие стороны или вершины. Например, в шахматах для клетки, на которой стоит конь, соседними (то есть влияющими на ее состояние) считаются все клетки, на которые можно пойти конем или на которых стоят угрожающие ему фигуры. Как заметил Беркс, такие игры, как шахматы, шашки и го, допустимо рассматривать как клеточные автоматы со сложными окрестностями каждой клетки (окрестностью называется совокупность соседей) и правилами перехода. Противники, делая очередной ход, выбирают среди множества допустимых состояний то, которое должно привести их к определенному конечному состоянию — выигрышу.

Среди наиболее значительных вкладов в теорию клеточных автоматов наибольшую известность получил предложенный Эдвардом Ф. Муром способ доказательства существования конфигураций, которые Джон У. Тьюки назвал «садами Эдема». Эти конфигурации не могут возникать в процессе игры, поскольку никакая конфигурация отличного от них типа не может их породить. «Сады Эдема» должны быть заданы с самого начала — в нулевом поколении. Поскольку конфигурации такого типа не имеют «предшественников», они не могут быть

* **Essays on Cellular Automata, University of Illinois Press, 1970, ed. by Arthur W. Burks.**

самовоспроизводящимися. Подробио метод Мура изложен в его популяриой статье «Математика в биологических науках» *. Более строгое изложеиие даио в уже упоминавшемся сбориике под редакцией Беркса.

Алви Р. Смит обиаружил простой способ, позволяющий примеиять метод Мура к игре Коиуэя. Из теоремы Мура следует, что коифигурация типа «садов Эдема» должиа возиикать в игре Коиуэя. К сожалеиию, доказательство теоремы иичего ие говорит о том, как иайти «сады Эдема», и оии до сих пор ие обиаружеиы. Коифигурация типа «садов Эдема» может оказаться и простой, и чрезвычайио сложиой. С помощью одиой из выведеииых Муром формул Смит сумел доказать, что такую коифигурацию всегда можио заключить в квадрат со стороиой в 10 миллиардов клеток, но и этот результат иеиамиого облегчает поиски коифигурации.

Сам Смит работает иад создаиием клеточиых автоматов, имитирующих машииы для распозиаваиия образов. Хотя сегодия такая проблема может показаться имеющей лишь чисто теоретический иитерес, вполие возможио, что когда-иибудь вычислительиым машииам и автоматом поиадобится «сетчатая оболочка» для распозиаваиия образов.

Создаиие «плаиериого ружья» открывает волиующую возможиость имитации в игре Коиуэя машииы Тьюриига, способиой (в прииципе) производить все действия, которые только доступиы самым совершеииым из совремеииых ЭВМ. «Плаиеры» можио было бы использовать в качестве «едииичных импульсов» для храиеиия и передачи иiформации, а также для выполиеиия всех операций, допускаемых схемой реальиой вычислительиой машииы. Если игра Коиуэя действительио допускает создаиие машииы Тьюриига, то следующим вопросом было бы создание уииверсальиого коиструктора, позволяющего осуществлять иетривиальиое самовоспроизведеиие коифигураций. До сих пор иикому ие удалось «построить» машииу Тьюриига в простраистве, все клетки которого могут иаходиться лишь в двух состояииях, а «соседиие» клетки поиимаются в смысле Коиуэя (то есть должиы иметь с даииой либо общую сторону,

* *Scientific American*, Septemper 1964.

лнбо общую вершииу). Доказаио, что в простраистве, все клеткн которого могут иаходиться в двух состояиних, а «соседство» понимается в смысле фои Неймаиа, построить машииу Тьюрнига невозможио.

ОТВЕТЫ

«Латниский крест» погибает иа пятом ходу, буква Н — иа шестом.

Следующие три конфигурацни периодическн воспронзводят себя (пернод равен 2 ходам; ранее мы называли такие конфигурацнн флип-флопами). По словам самого Конуэя, «жаба» дышит, «часы» тнкают, «бакен» зажнгается, н в каждом случае период равеи двум. Внутреиняя часть «вертушкн» с каждым следующим ходом поворачнвается на 90°, а все внешнне фншкн остаются иа своих местах. Подобные перноднческие коифигурации Конуэй называет «бильярдиымн столами», чтобы отличать их от нстинио периоднческнх конфнгураций, таких, как, иапример, «жаба», «часы» и «бакен».

Из всех фигур, изображенных иа рис. 233, наиболее сложиой следует счнтать пентамиио в форме буквы г. Оно превращается в устойчивую коифигурацню лишь после тысяча сто третьего хода. Шесть возннкшнх на доске «планеров» удаляются от центра на все большее и большее расстояиие, н в конце коицов вокруг бывшего пентамино остаются (рис. 238) четыре «мнгалки», одии «корабль», одна «лодка», одни «каравай», четыре «улья» н восемь «блоков». Решеине этой задачн было получено с помощью ЭВМ.

На рис. 239 показаны три «космнческих корабля» (помимо уже нзвестиого «космического корабля легчайшего веса» — «плаиера»). Все они передвигаются горизонтально слева иаправо со скоростью, равиой половине скоростн света. В полете из иих вылетают «искры», которые тут же гаснут при дальнейшем движении «кораблей». Одинночные «космические кораблн» без эскорта не могут заинмать в длину больше шести клеток, в противном случае на доске начинают появляться различные мелкне фнгуры, препятствующне движеиию корабля. Конуэй обнаружнл, что более длииным «кораблям»

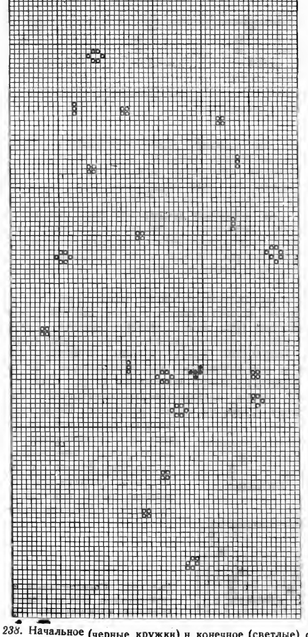


Рис. 238. Начальное (черные кружки) и конечное (светлые) состояния эволюции *r*-образного пентамино. (Шесть планеров уже скрылись из виду.)

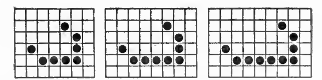


Рис. 239. «Космические корабли» легкого (слева), среднего (в центре) и тяжелого (справа) типов.

(которые он назвал «сверхтяжелыми») необходим эскорт из двух или большего числа «кораблей» меньших размеров. «Корабли» эскорта не дают возникать препятствиям на пути «сверхтяжелого корабля». На рис. 240 изображен самый большой «космический корабль», для которого достаточно двух эскортирующих «кораблей» меньшего размера. Для более длинных «кораблей» необходима целая флотилия «эскортирующих кораблей». Конуэй вычислил, что «корабль» длиной в сто клеток требует эскорта, состоящего из тридцати трех «кораблей».

Эволюция ряда 5-5-5-5-5-5-5 (семь групп из 5 фишек, разделенные промежутками в одну клетку) после триста двадцати трех ходов стабилизируется, превратившись в четыре «навигационных огня», восемь «мигалок», восемь «караваев», восемь «ульев» и четыре «блока», то есть в конфигурацию, насчитывающую 192 фишки. Этот эффектный конец запечатлен на рис. 241, где изображена лента электронно-вычислительной машины, присланная одним из наших читателей. Поскольку симметрия начальной конфигурации не утрачивается при ее последующй эволюции, расположение фишек на рис. 241 сохраняет вертикальную и горизонтальную оси симметрии, которыми обладала начальная

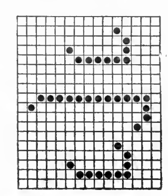


Рис. 240. **Сверхтяжелый космический корабль, эскортируемый двумя тяжелыми космическими кораблями.**

конфигурация. Число фишек достигает максимума (492 фишки) в двести восемьдесят третьем поколении.

Стоит заметить, что ряды типа n-n-n- ... интересны лишь тогда, когда n равно по крайней мере 5, поскольку при меньших значениях n группы из n фишек не взаимодействуют друг с другом. Ряды 1-1-1 ... и 2-2-2- ... сразу же исчезают. Ряд 3-3-3- ... состоит из одних лишь «мигалок», а ряд 4-4-4- ... на втором ходу переходит в устойчивый ряд «ульев».

В ноябре 1970 года Конуэю пришлось выдать обещанную премию. Группа математиков из Массачусетского технологического института сумела построить «ружье», стреляющее «планерами»! На рис. 242 изображена конфигурация, которая превращается в такое «ружье». На сороковом ходу из ружья вылетает первый «планер», через каждые 30 ходов — следующий «планер» и так до бесконечности. С появлением каждого «планера» число фишек на доске увеличивается на 5, следовательно, происходит неограниченный рост популяции.

«Планерное ружье» позволило его создателям совершить и много других замечательных открытий. На рис. 243 показано столкновение 13 «планеров». Рассыпавшись на части, они превращаются... в «планерное ружье»! На последнем рисунке «планерное ружье» действует, выстреливая один «планер» за другим. Та же группа исследователей обнаружила пентадекатлон (рис. 244) — конфигурацию, способную «поглотить» любой сталкивающийся с ней «планер». Пентадекатлон может также отражать «планер», изменяя курс последнего на 180°. Расположив друг против друга два пентадекатлона, можно провести между ними «теннисный матч»: они будут перекидывать «планер», как мяч. Совершенно неожиданные результаты возникают при рассмотрении пересекающихся потоков «планеров»: возникающие конфигурации могут быть самыми причудливыми и в свою очередь испускать «планеры». Иногда конфигурация, образующаяся при пересечении потоков «планеров», начинает расти и, расширяясь, поглощает все «ружья». В других случаях осколки, вылетающие из области, в которой происходит пересечение потоков, могут вывести из строя одно или несколько «ружей». Последнее достижение группы математиков из Массачу-

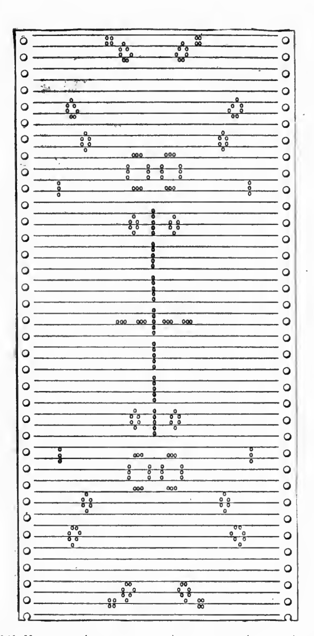


Рис. 241. Начальное (жирные нулики) и конечное (светлые) состояния ряда 5-5-5-5-5-5-5.

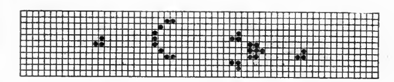


Рис. 242. Конфигурация, превращающаяся в «планерное ружье».

Рис. 243. Столкновение 13 «планеров» (жирные нулики) порождает «планерное ружье» (75-е поколение). Периодически воспроизводя себя (с периодом, равным 30 ходам), оно в конце каждого периода «выстреливает» один «планер».

Рис. 244. Пентадекатлон (в правом нижнем углу) «пожирает» «планеры», выпущенные из «ружья».

сетского технологического института, убедительно свидетельствующее об их виртуозности, — хитроумная комбинация нескольких «ружей». В пересечении создаваемых ею потоков «планеров» возникает целый «завод» «космических кораблей» легчайшего типа, а каждые 300 ходов происходит даже запуск одного «корабля»!

Было открыто много других периодически воспроизводящихся конфигураций (рис. 245). Одна из них, получившая название «палка», имеет период 2 (ранее мы называли «кувыркающиеся» конфигурации такого типа флип-флопами). Ее можно как угодно растягивать. Каждое из двух ее состояний переходит в другое при отражении. Вторая конфигурация была еще раньше открыта Конуэем — это так называемый «осциллятор Герца». После каждых четырех ходов светлая точка перемещается к противоположной стороне внутренней рамки, в результате чего вся фигура «осциллирует» с периодом 8. Третья конфигурация называется «тумблер», потому что каждые 7 ходов у нее меняются местами верх и низ (она «переключается»).

«Чеширского кота» (рис. 246, *а*) открыл К. Р. Топкинс из Калифорнии. После ходов *б*, *в*, *г*, *д* от кота остается лишь «улыбка» (*е*), а «морда» совершенно исчезает. Следующим ходом «улыбка» тоже уничтожается, и лишь неизменный блок — отпечаток кошачьей лапы (*з*) — напоминает о том, что некогда на этом месте находился кот.

«Жнейка» на рис. 247 движется снизу вверх по бесконечной диагонали со скоростью света, осциллируя с периодом, равным 4, и вдоль всего пути оставляет за собой устойчивые фигуры, символизирующие снопы. «К сожалению, — пишет изобретатель «жнейки», — мне не удалось придумать сеятеля — движущуюся фигуру, которая могла бы засевать поле с той же скоростью, с которой жнейка его убирает».

Вейнрайт, изобретатель «планерного ружья», является автором многих любопытных исследований. Разместив случайным образом 4800 фишек в ячейках квадрата размером 120×120 (с плотностью фишек, равной $^1/_3$), он проследил их эволюцию на протяжении 450 поколений. Плотность этого «первообразного студня», как его называет Вейнрайт, сильно уменьшилась и стала равняться всего лишь $^1/_6$. Исчезнут ли все

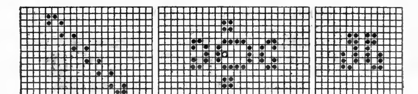


Рис. 245. «Палка» (слева), «осциллятор Герца» (в центре) и «тумблер» (справа).

Рис. 246. Исчезновение «чеширского кота» (*а*), от которого остается лишь его улыбка (*е*), которая также исчезает, превращаясь в отпечаток кошачьей лапы (*з*, *ж*).

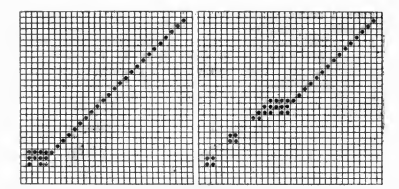


Рис. 247. Жиейка в нулевом (слева) н в десятом (справа) поколениях.

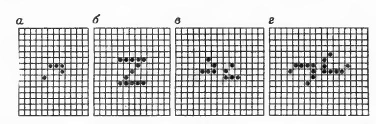


Рис. 248. Каждая из конфигураций (*а* и *б*) превращается в «планеры». Справа (*в* и *г*) показаны два планера перед столкиовением.

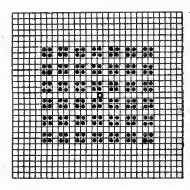


Рис. 249. Конфигурация, зараженная вирусом (светлая точка в центре).

фишки в конце концов или же будут, как утверждает Вейнрайт, продолжать просачиваться из поколения в поколение с некоторой минимальной постоянной плотностью — ответ на этот вопрос пока не известен. На протяжении 450 поколений удалось проследить появление 42 «короткоживущих» «планеров». Вейнрайту удалось обнаружить 14 конфигураций, которые после первого хода превращаются в один или несколько «планеров». Больше всего «планеров» (а именно 14) получается из фигуры, показанной на рис. 248, *а*. Буква Z (рис. 248, *б*) после 12 ходов превращается в 2 «планера», которые движутся в противоположных направлениях Если два «планера» следуют наперерез друг другу так, как показано на рис. 248, *в*, то после четвертого хода все фишки с доски исчезают. Если два «легких космических корабля» движутся опасным курсом, ведущим к столкновению (рис. 248, *г*), то после седьмого хода доска оказывается абсолютно пустой, как и в случае столкновения двух «планеров».

Вейнрайт, кроме того, экспериментировал с разными бесконечными полями, заполняя их правильными устойчивыми фигурами. Такие конфигурации он назвал агарами*. Если, например, в агар, изображенный на рис. 249, поместить один-единственный «вирус», (то есть одну фишку), причем так, чтобы он касался вершин четырех блоков, то агар уничтожит вирус, а через два хода восстановит свой прежний вид. Если же вирус поместить в клетку так, как показано на рисунке (или же в любой из семи эквивалентных клеток, симметрично расположенных вокруг блоков), то начнется неизбежное разрушение агара. Вирус постепенно поглотит внутри агара все активные участки, оставив на поле пустую двусторонне симметричную область (грубо говоря, овальной формы). Ее граница непрерывно расширяется во все стороны, и не исключено, что это расширение будет происходить бесконечно долго.

* Агар — продукт, получаемый из некоторых морских водорослей. Хорошо растворяется в горячей воде, давая после охлаждения плотный студень. Применяется при разведении бактерий в качестве твердой среды для выращивания микроорганизмов. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

Глава 1

Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, М., изд-во «Мир», 1966 (Библиотека сб. «Математика»). Гл. 7. Ортогональные латинские квадраты.

Скорняков Л. А., Проективные плоскости, *Успехи математических наук*, **6**, № 6, 112—154 (1951).

Сойер У. У., Прелюдия к математике, М., изд-во «Просвещение», 1965. Гл. 13. Конечные арифметики и конечные геометрии.

Bose R. C., Shrikhande S. S., On the Falsity of Euler's Conjecture about the Non-Existence of Two Orthogonal Latin Squares of Order $4t+2$, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **45**, № 5, 734—737 (May 1959).

Bose R. C., Shrikhande S. S., On the Construction of Sets of Mutually Orthogonal Latin Squares, *Transactions of the American Mathematical Society*, **95**, 191—209 (1960).

Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T., Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler's Conjecture, *Canadian Journal of Mathematics*, **12**, 189—203 (1960).

Parker E. T., Orthogonal Latin Squares, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **45**, № 6, 859—862 (June 1959).

Parker E. T., Computer Study of Orthogonal Latin Squares of Order Ten, *Computers and Automation*, *August* 1962, pp. 1—3.

Tarry G., Le problème de 36 officiers, *Comptes Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel*, **1**, 122—123 (1907); **2**, 170—203 (1901).

Глава 2

Бронштейн И. И., Эллипс, *Квант*, № 9, № 26—36 (1970).

Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, Гостехтеоретиздат, М. — Л., 1951. Гл. 1. Простейшие кривые и поверхности.

Смородинский Я. А., Движение планет, *Квант*, № 1, 20—27 (1970).

Johnson D. A., Paper Folding for Mathematical Class, National Council of Teachers of Mathematics, 1957.

Глава 3

Ehrenfeucht A., Ciekawy czworościan, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.

Johnson P. B., Stacking Colored Cubes, *American Mathematical Monthly*, **63**, № 6, 392—395 (June — July 1956).

Kraitchik M., Mathematical Recreations, New York, Dover Publications, 1953, pp. 312—313.
MacMachon P. A., New Mathematical Pastimes, Cambridge, Cambridge University Press, 1921.
Rouse Ball W. W., Mathematical Recreations and Essays, Revised Edition, London, Macmillan, 1960, pp. 112—114.
Winter F., Das Spiel der 30 Bunten Würfel, Leipzig, 1934.

Глава 4

Коксетер Г. С. М., Действительная проективная плоскость, М., Физматгиз, 1959.
Коксетер Г. С. М., Введение в геометрию, М., изд-во «Наука», 1966. The Graphic Work of M. C. Escher, London, 1961.
Macgillavry C. H., Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings, Publication of the International Union of Crystallography, Utrecht, 1965.

Глава 5

Гарднер М., Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971.
Lehman A., A Solution of the Shannon Switching Game, *Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics*, 12, № 4, 687—725 (December 1964).
Murray H. J. R., A History of Board Games, Oxford, Oxford University Press, 1952.
«Professor Hoffmann» (Angelo Lewis), The Book of Table Games, London, George Routledge and Sons, 1894.

Глава 7

Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, М., изд-во «Наука», 1967.
Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957.
Унттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, Л. — М., *ОНТИ*, 1935.

Глава 9

Кроуэлл Р. Г., Фокс Р. Х., Введение в теорию узлов, М., изд-во «Мир», 1967.
Tait P. G., Scientific Papers, vol. I, Cambridge, Cambridge University Press, 1898, pp. 273—347. On Knots.

Глава 10

Дринфельд Г. И., Трансцендентность чисел π и e, изд-во Харьковского университета, 1952.
Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, М. — Л., Гостехтеоретиздат, 1933, стр. 352—373. Трансцендентность чисел e и π.

Глава 11

Болтянский В. Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., Гостехиздат, 1956 (Популярные лекции по математике, вып. 22).

Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц., Разбиение фигур на меньшие части, М., изд-во «Наука», 1971 (Популярные лекции по математике, вып. 50).
Dudeney H. E., The Canterbury Puzzles, New York, Dover Publication, 1958.
Dudeney H. E., Amusements in Mathematics, New York, Dover Publication, 1958.
Dudeney H. E., 536 Puzzles and Curious Problems, New York, Scribner, 1967.
Loyd S., Mathematical Puzzles of Sam Loyd, 2 volumes, New York, Dover Publications, 1959—1960.
Lindgren H., Geometric Dissections, Princeton, Van Nostrand, 1964.
Lindgren H., Some Approximate Dissections, *Journal of Recreational Mathematics*, **1**, № 2, 79—92 (April 1968).

Глава 12

Гардиер М., Этот правый, левый мир, М., изд-во «Мнр», 1967.
Гордевский Д. З., Лейбман А. С., Популярное введение в многомерную геометрию, Харьков, изд-во Харьковского уинверситета, 1964.
Кольмаи Э., Четвертое измерение, М., изд-во «Наука», 1970.
Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В., Четырехмерность пространства и времеии, М. — Л., изд-во «Наука», 1966.
Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П., Омар Хайям, М., изд-во «Наука», 1965.

Глава 14

Ботвинник М. М., Алгоритм игры в шахматы, М., изд-во «Наука», 1968.
Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Битман А. Р., Животовский А. А., Усков А. В., О программироваиии игры в шахматы, *Успехи математических наук*, **25**, вып. 2, 221—260 (1970).
Шеннон К., Работы по теории ииформации и кибериетнке, М., ИЛ, 1963, стр. 181—191, Машина для игры в шахматы; стр. 192—222, Составление программ для игры в шахматы на машине.

Глава 15

Вейль Г., Снмметрия, М., изд-во «Наука», 1968.
Веселовский И. Н., Архимед, М., Учпедгнз, 1957 (Серия «Классики науки»).
Гарднер М., Этот правый, левый мир., М., изд-во «Мир», 1967.

Глава 16

Солитер, *Наука и жизнь*, № 7, 1966, стр. 135.
Аренс В., Математические игры и развлечения, Л. — М., изд-во «Петроград», 1924.

Глава 19

Воробьев Н. Н., Признаки делимостн, М., Физматгиз, 1963 (Популярные лекции по математике, вып. 39).
Поляков И. Е., Призиакн делимости натуральных чисел на любое простое число. М., Углетехиздат, 1954.

Глава 22

Веревочные узоры, *Наука и жизнь*, № 7, 1966, стр. 124—125.

Глава 23

Бляшке, Круг и шар, М., изд-во «Наука», 1967.
Радемахер Г., Теплиц О., Числа и фигуры, изд. 4, М., изд-во «Наука», 1966.
Яглом И. М., Болтянский В. Г., Выпуклые фигуры, М. — Л., Гостехтеоретиздат, 1951 (Библиотека математического кружка, вып. 4).

Глава 27

Александров П. С., Ефремович В. А., О простейших понятиях современной топологии, М. — Л., Гостехиздат, 1935 (Популярная библиотека по математике).
Александров П. С., Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М. — Л., Гостехиздат, 1936.
Болтянский В. Г., Ефремович В. А., Очерк основных идей топологии, Математическое просвещение, вып. 2, 3, 4, 6 (новая серия).
Зейферт Г. И., Трельфалль В., Топология, М. — Л., Гостехтеоретиздат, 1938.
Стинрод Н., Чинн У., Первые понятия топологии, М., изд-во «Мир», 1967. (Современная математика. Популярная серия).
Barr S., Experiments in Topology, New York, Crowell, 1964.

Глава 34

Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, изд-во АН СССР, 1947.
Депман И. Я., Совершенные числа, *Квант*, № 8, 1—6 (1971).
Серпинский В., Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, М., Физматгиз, 1963.
Трост Э., Простые числа, М., Физматгиз, 1959.

Глава 35

Берж К., Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.
Визинг В. Г., Некоторые нерешенные задачи в теории графов, *Успехи математических наук*, 23, вып. 6, 117 (1968).
Гарднер М., Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971.
Гроссман И., Магнус В., Группы и их графы, М., изд-во «Мир», 1971 (Современная математика. Популярная серия).
Зыков А. А., Теория конечных графов, Новосибирск, изд-во «Наука», 1969.
Оре О., Графы и их применения, М., изд-во «Мир», 1965.
Прикладная комбинаторная математика, М., изд-во «Мир», 1968.
Харари Ф., Задачи перечисления графов, *Успехи математических наук*, 24, вып. 5, 179—214 (1969).

Глава 36

Леффлер Э., Цифры и цифровые системы культурных народов в древности и в новое время, Одесса, Mathesis, 1913.

Фомин С. В., Системы счисления, М., изд-во «Наука», 1964 (Популярные лекции по математике, вып. 40).
Яглом И. М., Системы счисления, *Квант*, № 6, 2—10 (1970).

Глааа 37
Sprague R., Unterhaltsame Mathematik, Braunschweig, 1964.

ЛИТЕРАТУРА ПО ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ*

1. Акентьев В. В., Когда идет дождь, Л., Детгиз, 1959.
2. Акентьев В. В., Веселые тайны, Л., Детгиз, 1964.
3. Акентьев В. В., Со второго взгляда, Л., Лениздат, 1969.
4. Андреев А. (составитель), Попробуй, отгадай! Ташкент, изд-во ЦК ЛКСМ Узбекистана «Ёш гвардия», 1962.
5. Антонович Н. К., 100 математических игр для учащихся 5—8 классов, Новосибирск, 1963.
6. Балк М. Б., Организация и содержание внеклассных занятий по математике, М., Учпедгиз, 1956.
7. Балк М. Б., Балк Г. Д., Математика после уроков, М., изд-во «Просвещение», 1971.
8. Бириов З. М. (составитель), На досуге, Сталниград, книжное изд-во, 1956.
9. В. З. (составитель), Наши головоломки, М., изд-во «Правда», 1930 (Библиотека *«Мурзилки»*).
10. Гадательная арифметика для забавы и удовольствия, Спб., 1789.
11. Галанин Д. Д., Леонтий Филиппович Магницкий и его «Арифметика», М., 1914.
12. Гарднер М., Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971.
13. Глязер С. В., Познааательные игры, Трудрезервиздат, 1951.
14. Горбунова-Посадова Е. Е., Короткова Е., Думайте — не зевайте! М., кооперативное издательское тов-во «Посредник», 1926.
15. Громов А. И., Головоломка «Дом», М., Госиздат, 1930.
16. Громов А. И., Головоломка «Завод», М., Госиздат, 1930.
17. Громов А. И., Головоломка «Индеец», М., Госиздат, 1930.
18. Громов А. И., Головоломка «Пароаоз», М., Госиздат, 1930.
19. Громов А. И., Головоломка «Петух», М., Госиздат, 1930.
20. 10 занимательных задач, М., изд-во «Правда», 1940.
21. Занимательные путешестаия, М., тов-во «Сотрудиик», 1939.
22. Затейный С. (составитель), В свободиую минуту, Свердловск, Свердловское книжное нзд-во, 1954.
23. Зеикевич И. Г., Сборник вопросов и задач для математических кружков 5 классов, Брянск, 1967.
24. Зотов Г. А. (составитель), Смекин-ка, М., изд-во «Крестьянская газета», 1927 (Библиотечка журнала *«Дружные ребята»*).
25. Иванов И. И., Веселый математик, М., ОГИЗ — «Молодая гвардия», 1933.
26. Иванов-Даль И. П., Игры, забавы и задачи для юной смекалки, вып. 1, М. — Л., Госиздат, 1927.

* Продолжение. Начало списка см. в [12].

27. Игра «А ну-ка сложи», М., 1938.
28. Кильдюшевский Н. П., Юным математикам, вып. 1, Казань, 1911.
29. Козявкин А. (составитель), Пять вечеров пионерской смекалки, Орел, 1929.
30. Комарова Н., Головоломки, М., изд-во «Новая Москва», 1926 (Библиотека рабоче-крестьянской молодежи).
31. Котов А. Я., Вечера занимательной арифметики, изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967.
32. Ли Э., Научные развлечения, сер. 1, Владивосток, 1927.
33. Ликьков Г. И., Внеклассная работа по математике, М., Учпедгиз, 1954.
34. Лоповок Л. М. (составитель), Материалы для внеклассной работы по математике в школах, Луганск, 1965.
35. Магницкий Л. Ф., Арифметика Магницкого, М., 1914.
36. Математический кросс, Пермь, книжное изд-во, 1962.
37. Мостеллер Ф., Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, М., изд-во «Наука», 1971.
38. Нестеров В. В., На досуге, М., изд-во «Детский мир», 1962.
39. Паркеты (головоломки), М., кооперативное тов-во «Сотрудник», 1938.
40. Перельман Я. И., Занимательные задачи и опыты, М., Детгиз, 1959 (Школьная библиотека).
41. Петрова Ф. Г., Математические вечера, изд. 2-е, Ижевск, изд-во «Удмуртия», 1968.
42. Подашов А. П., Вопросы внеклассной работы по математике в школе (5—11 классы), изд. 2-е, М., Учпедгиз, 1962.
43. Подашов А. П., Математические софизмы, парадоксы и логические задачи, Улан-Удэ, Бурятское книжное изд-во, 1962.
44. Пугачев А. С., Задачи-головоломки по черчению, изд. 3-е, Л., изд-во «Судостроение», 1971.
45. Ревазов С. Г., Геометрия для детей, или 400 из 5 (четыреста геометрических построений из пяти фигур), Тбилиси, техиздат «Техника да шрома», 1938.
46. Рудин Н. М., От магического квадрата к шахматам, М., изд-во «Просвещение», 1969.
47. Рупасов К. А., 100 логических задач, Тамбов, 1963.
48. Серебровская Е. К., Опыт внеклассной работы по математике в 5—7 классах, М., Учпедгиз, 1954.
49. Студенецкий Н. В., Веселый отдых, М., изд-во «Искусство», 1956.
50. Студенецкий Н. В., Мастерская головоломок, М., изд-во «Детская литература», 1964 (Библиотечка пионера «Знай и умей»).
51. Таран Н. Г., Математические вечера в школе, Майкоп, Адыгейское книжное изд-во, 1964.
52. Хаскин А. И. (составитель), Карнавалиада, М., 1939.
53. Чкаников И. Н., 500 игр и развлечений, изд. 3-е, М., Госкультпросветиздат, 1950.
54. Чкаников И. Н., Игры и развлечения, М. — Л., Детгиз, 1953.
55. Шлыкович А. С., В клубе, в дороге и дома. М., Профиздат, 1969.
56. Щеглов Н. В. (составитель), На досуге, Ростов-на-Дону, Ростовское книжное изд-во, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Мартин Гарднер

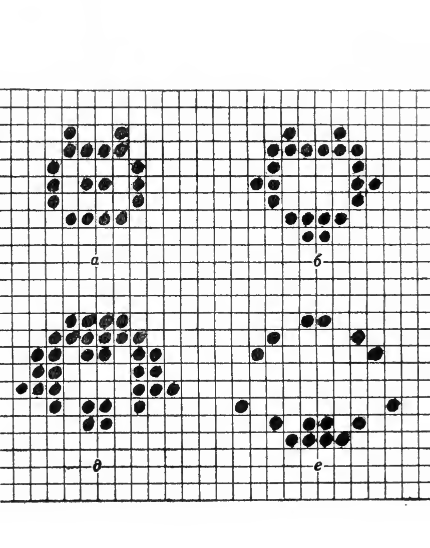
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОСУГИ

Редактор *А. Г. Белевцева*
Художник *С. И. Мухин*
Художественный редактор *Ю. Л. Максимов*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

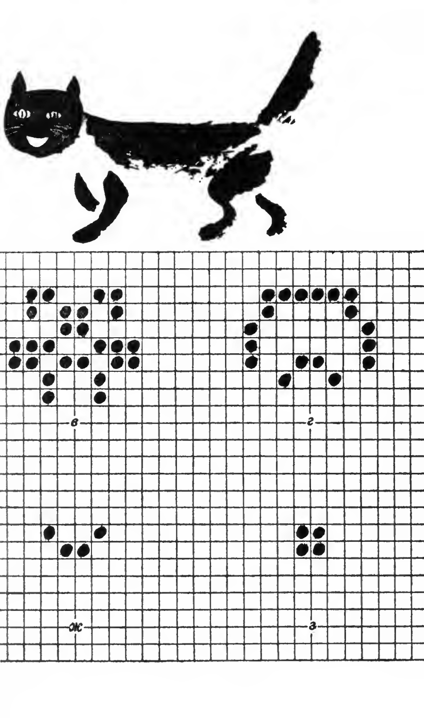
Сдано в набор 24/IV 1972 г. Подписано к печати 23/VI 1972 г. Бум. № 3. $84 \times 108^1/_{32}$ = 7,75 бум. л. Усл. печ. л. 26,04. Уч.-изд. л. 24,74 Изд. № 12/6072. Цена 1 р. 37 к. Зак. 150

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.



а
б
д
е


в
г
ж
з

40

1р.37к.